

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

29. Band, Heft 5

5. September 1948

S. 193—240

Geschichte.

Neugebauer, O.: *Studies in ancient astronomy. VIII. The water clock in Babylonian astronomy.* Isis, Cambridge Mass. **37**, 37—43 (1947).

Während in der späteren babyl. Astronomie (ab 3. Jhdt. v. Chr.) bereits hochentwickelte mathem. Methoden zur Bestimmung der Ephemeriden für Mond und Planeten Anwendung finden, beschäftigen sich die primitiveren, älteren astronomischen Texte, die möglicherweise auf Vorlagen aus der ersten Hälfte des 2. vorchristlichen Jahrhunderts zurückgehen, hauptsächlich mit Kalenderproblemen. Für die Erklärung der Zeitmessung in dieser älteren Periode ist der vorliegende Aufsatz von grundlegender Bedeutung. In einigen Texten ist das Verhältnis zwischen der längsten und kürzesten Dauer des Tageslichtes für die Zeit der Sonnenwenden mit 3:2 angegeben, was unter Berücksichtigung der atmosphärischen Refraktion etwa für Babylon ($32\frac{1}{2}^\circ$) stimmt. Daneben sprechen die Texte auch von einem Verhältnis 4 Mana:2 Mana (mana = $\mu\bar{w}$), wobei „mana“ keinesfalls ein Zeitmaß sein kann, da ein solches Verhältnis der Tageslängen zu einer geographischen Breite von 48° gehört, also für Babylon ausgeschlossen ist. In Übereinstimmung mit Kuglers Erklärung, daß hier „mana“ das Wassergewicht einer Wasseruhr sein muß, zeigt Verf., daß tatsächlich bei zylinderförmigen Wasseruhren das Verhältnis 2:1 der Wassergewichte mit einer erträglichen Annäherung ($\sqrt[3]{8} : \sqrt[3]{4} \approx 3:2$) dem Verhältnis 3:2 der Auslaufzeiten entspricht. Wenn man also zur Zeit der Sommersonnenwende in eine zylindrische (oder prismatische) Wasseruhr von bestimmter Größe 2 Mana Wasser schüttet, ist die „Nachtwache“ zu Ende, wenn das Gefäß geleert ist. Gibt man nun linear interpolierend (wie auch sonst in der antiken Astronomie üblich) für jeden halben Monat $\frac{1}{2}$ Mana zu, dann hat man in der Zeit der Wintersonnenwende $2 + 12 \cdot \frac{1}{2} = 4$ Mana einzugießen, um eine für diese Nachtlänge richtige Füllung zu erhalten. — Den Schluß des Aufsatzes bilden Hinweise auf noch unbeantwortete, besonders metrologische Fragen sowie Auszüge aus den einschlägigen Texten. *Vogel.*

Waerden, B. L. van der: *Egyptian „Eternal tables“.* I u. II. Proc. Akad. Wet. Amsterdam **50**, 536—547, 782—788 (1947).

Verf. zeigt in Teil I, daß die in drei ägyptischen Texten (P, S und T) gegebenen Daten für den Eintritt von Venus, Mars und Jupiter in die Tierkreiszeichen mit der babyl. Planetenrechnung übereinstimmen. In II werden die Untersuchungen auf Saturn u. Merkur ausgedehnt. Für Saturn wird gezeigt, daß S nicht nach dem Verfahren des babyl. Textes AO 6477 (untersucht von Kugler, Sternkunde II) berechnet wurde; dagegen ist die Einteilung der Ekliptik in eine langsame und eine schnelle Region dieselbe. Für Merkur ergibt S — wie auch babyl. Texte — eine Einteilung der Ekliptik in 3 Teile (langsame, mittlere und schnelle Region). — Weiterhin vergleicht Verf. babyl. Daten mit dem den Texten S und T zugrunde liegenden Alexandrinischen Kalender und stellt für eine Reihe von ungeklärten Fragen ein Untersuchungsprogramm auf. *K. Vogel (München).*

Enriques, F.: *Prefazione agli elementi di Euclide.* Periodico Mat., IV. s. **25**, 66—72 (1947).

Für die im Erscheinen begriffene 2. Auflage seiner Euklidausgabe hat der am 16. 6. 47 verstorbene Verf. eine zweite Einleitung verfaßt, die hier zum Jahrestag seines Todes gesondert abgedruckt wird. — Anschließend an einen Überblick über den Inhalt der 13 Bücher der Elemente wird ein Bild der Entwicklung der griechi-

schen Mathematik vor Euklid mit wenig Strichen treffend gezeichnet, wobei auch hervorgehoben wird, daß der Inhalt der Elemente nicht alle bis dahin von den Griechen erarbeiteten geometrischen Erkenntnisse umfaßt. *Kurt Vogel.*

Kattsoff, Louis O.: A note on the history of an idea. *Isis*, Cambridge Mass. 38, 18—22 (1948).

Es wird an Hand von Zitaten aus dem *Almagest* (nach der Übersetzung von R. Catesby, Taliaferro, 1939) nachgewiesen, daß Ptolemäus bewußt bestrebt war, eigene und fremde Beobachtungen so in ein System zu bringen, daß die dabei aufgestellten Hypothesen möglichst viele Vorgänge am Himmel zu erklären vermögen. Mit dieser Feststellung will sich Verf. gegen diejenigen wenden, die wissenschaftliche Methoden erst mit Kopernikus beginnen lassen. — Dazu ist zu sagen, daß man an sich viel weiter zurückgehen muß. Man denke an Sokrates und Aristoteles als Begründer der induktiven Methode oder an griechische Mathematik und Medizin. *Kurt Vogel* (München).

● **Fraenkel, Abraham A.:** The jewish contribution to mathematics and astronomy Tel-Aviv, 1947, 32 p. [Hebräisch].

Thorndike, Lynn: Who wrote *quadrans vetus*? *Isis*, Cambridge Mass. 37, 150 bis 153 (1947).

Richeson, A. W.: The first arithmetic printed in english. *Isis*, Cambridge Mass. 37, 47—56 (1947).

Verf. beginnt mit genauen bibliographischen Angaben über die 8 Ausgaben und die Drucker des anonymen Rechenbuchs von St. Albans mit dem Titel: An Introduction for to Lerne to Recken with the Pen, or with the Counters (1537 bis 1629). Auf Grund der Inhaltsangabe mit geschickt eingeflochtenen Textproben wird festgestellt, daß der erste Teil (Grundrechnungsarten) stärker von französischen, der zweite Teil (Anwendungen) stärker von deutschen Vorbildern der damaligen Zeit abhängt. *J. E. Hofmann* (Tübingen).

● **Newton tercentenary celebrations, 15—19 July 1947.** Cambridge: At the University Press. 1947. XV, 92 p. and 6 plates. 10 s. 6 d. net.

Cowan, Russell W. and Bernard C. Weber: Fermat's contribution to the development of the differential calculus. *Scripta math.*, New York 13, 123—127 (1947).

An Hand von Beispielen aus den französischen Texten der *Fermat-Œuvres* III (Paris 1896) heben die Verff. die bedeutungsvollen Beiträge Fermats zur Lehre von den Extremwerten und zum Tangentenproblem hervor. Leider scheint ihnen der Supplement-Band der *Œuvres* (Paris 1922) mit seinen wichtigen Ergänzungsstücken ebenso entgangen zu sein wie der eingehende Aufsatz von H. Wieleitner im *Jber. Deutsche Math. Verein.* 38, 24—35 (1929), der die beste veröffentlichte Einzelstudie zum vorliegenden Thema aus den letzten 20 Jahren darstellt. *J. E. Hofmann* (Tübingen).

Boyer, Carl B.: Note on an early graph of statistical data (Huygens 1669). *Isis*, Cambridge Mass. 37, 148—149 (1947).

Hinweis auf die graphische Auswertung der englischen Sterblichkeitstabelle, die Huygens von seinem Bruder Ludwig im November 1669 erhalten hatte (*Huygens, Œuvres complètes* VI, S. 515ff., 524ff., 537ff. und XIV, S. 12ff.). *Hofmann.*

Loria, Gino: Ernest de Jonquières, sailor and scientist. *Scripta math.*, New York 16, 5—15 (1947).

In dieser mit einem Lichtbild versehenen Biographie gibt der 85jährige Altmeister unter den Historikern der Mathematik eine liebevoll gezeichnete, auch Schwächen nicht verschweigende Würdigung der wissenschaftlichen Persönlichkeit eines Mannes, der zwar nicht zu den Forschern ersten Ranges gehört, aber doch einen hervorragenden Platz unter den französischen Mathematikern der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts einnimmt. Die Geschichte der algebraischen Geometrie, die in Deutschland und Italien ihre Blüte erreichte, wird um einige bisher nicht be-

kannte Züge bereichert. — E. de Jonquières (1820—1901) gehörte von 1835—1885 im Hauptberuf der französischen Marine an, wo er bis zum Vizeadmiral aufstieg. Daneben entfaltete er eine fruchtbare wissenschaftliche Tätigkeit, die ihren Niederschlag in etwa 150 mathematischen Abhandlungen gefunden hat. Daß er außerdem gute Übersetzungen der Episteln von Horaz verfaßt hat, zeugt für die Weite seiner Bildung. Als Schüler von Chasles wandte er sich der Geometrie zu, gab Beweise von Lehrsätzen und Lösungen von Problemen, die sein Lehrer formuliert hatte, und veröffentlichte nach diesen Proben seiner mathematischen Begabung eine Reihe ergebnisreicher Untersuchungen über algebraische Kurven und Flächen. Mit Geschick und Erfolg entwickelte und verwandte er Methoden der abzählenden Geometrie zur Lösung von Problemen aus dem Gebiet der projektiven Transformationen; vgl. die nach ihm benannte, sehr allgemeine Formel über Schnittpunkteigenschaften algebraischer Kurven [J. reine angew. Math. 66, 289—321 (1866)]. Als einer der Begründer der Theorie der birationalen Transformationen fand und studierte er die wichtige isologische Transformation, die seinen Namen trägt [Giorn. Mat. Battaglini 23, 48—75 (1884)]. Im hohen Alter beschäftigte er sich auch mit dem schon von Descartes gefundenen sog. Eulerschen Satz über die Anzahl der Flächen, Kanten und Ecken eines Polyeders. Auf dem Gebiet der Arithmetik und Algebra hat de Jonquières beachtenswerte Beiträge zur Zahlentheorie und zur Theorie der algebraischen Gleichungen geliefert.

E. Löffler (Stuttgart).

Beumer, M. G.: Eine historische Einzelheit aus dem Leben von Gottlob Frege (1848—1925). Simon Stevin wis. natuurk. Tijdsch. 25, 146—149 (1947) [Holländisch].

Beth, E. W.: Nachwort. Simon Stevin wis. natuurk. Tijdschr. 25, 150—151 (1947) [Holländisch].

Myrberg, P. J.: Ernst Lindelöf in Memoriam. Acta math., Uppsala 79, I—IV (1947). Nachruf mit Schriftenverzeichnis.

Sarton, George: Paul, Jules and Marie Tannery (with a note on Grégoire Wyrouboff). Isis, Cambridge Mass. 38, 33—51 (1948).

Castelnuovo, G.: Commemorazione del Socio Federico Enriques. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 2, 3—21 (1947). Nachruf mit Schriftenverzeichnis.

Castelnuovo, Guido: Commemorazione di Federico Enriques. Periodico Mat., IV. s. 25, 81—94 (1947).

Campedelli, Luigi: Federico Enriques nella storia, la didattica e la filosofia delle matematiche. Periodico Mat., IV. s. 25, 95—114 (1947).

Chisini, Oscar: Accanto a Federico Enriques. Periodico Mat., IV. s. 25, 117—123 (1947).

Campedelli, L. ed A. Barlotti: Elenco cronologico delle pubblicazioni di Federico Enriques. Periodico Mat., IV. s. 25, 124—151 (1947).

Conforto, Fabio: Intuizione visiva degli enti algebrici. Periodico Mat., IV. s. 25, 115—116 (1947).

Kurze, einer Gedenkfeier für Federico Enriques entnommene Charakteristik der anschaulich-intuitiven Einstellung Enriques' zum mathematischen Denken, insbesondere in der algebraischen Geometrie.

Pietsch (Berlin).

Die Arbeiten von N. E. Žukovskij. Priklad. Mat. Mech., Moskva 11, 3—40 (1947). (3—8 russisch, 9—26 englisch, 27—40 Verzeichnis der Veröffentlichungen.)

Sasuly, Max: Irving Fisher and social science. Econometrica, Menasha 15, 255—278 (1947).

Pearse, R. W. B.: Paul Langevin. Proc. physic. Soc. London 59, 1041—1042 (1947).

•Frank, Philipp: Einstein, his life and times. Trans. from a German manuscript by George Rosen, ed. by Shuichi Kusaka. New York: Alfred Knopf, 1947. XI, 298, XII pp. \$ 4,50.

Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

Walker, A. G.: Durées et instants. Rev. sci., Paris 85, 131—134 (1947).

Statt die Zeit aus punktuellen Augenblicken „zusammensetzen“, definiert Verf. zunächst „Zeitspannen“ und dann die Augenblicke durch bestimmte Klassen von Zeitspannen. Das Endergebnis M ist die übliche lineare Mannigfaltigkeit punktueller Augenblicke.

C. F. v. Weizsäcker (Göttingen).

Cazin, M.: Algorithmes et théories physiques. C. r. Acad. Sci., Paris 224, 541—543 (1947).

Destouches-Février, P.: Sur la notion d'adéquation et le calcul minimal de Johansson. C. r. Acad. Sci., Paris 224, 545—547 (1947).

Destouches-Février, P.: Adéquation et développement dialectique des théories physiques. C. r. Acad. Sci., Paris 224, 803—805 (1947).

Cazin, M.: Algorithmes et construction d'une théorie unifiante. C. r. Acad. Sci., Paris 224, 805—807 (1947).

Aufstellung verschiedener Sätze über den Aussagenkalkül, der die Angemessenheit einer mathematischen Theorie an einen Erfahrungsbereich logisch beherrscht (Diskussion verschiedener Formen einer Modalitätenlogik), und über die Bedingungen, welche durch die Vereinigung mehrerer Theorien in einer umfassenden Theorie an einen derartigen Kalkül gestellt werden.

C. F. v. Weizsäcker (Göttingen).

Popper, K. R.: Functional logic without axioms or primitive rules of inference. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 50, 1214—1224 (1947).

Verf. schlägt zum Aufbau der Logik einen wesentlich anderen Weg als den üblichen ein. Anstatt die logischen Grundbeziehungen wie die des Aussagenkalküls durch Axiome und Ableitungsregeln zu charakterisieren, wird gewissermaßen eine syntaktische Definition dieser Operationen gegeben. Grundlegend sind zwei undefinierte Begriffe der Metasprache, nämlich die Ableitbarkeit von b aus a_1, \dots, a_n und die Substitution einer Variablen für eine andere innerhalb eines Ausdrucks. Mit Hilfe dieser Begriffe wird nun z. B. nicht eigentlich die Konjunktion definiert, sondern gewissermaßen die logische Rolle der Konjunktion, d. h. es wird definiert, unter welchen Umständen ein Ausdruck a zu der Konjunktion von b und c in der Beziehung der gegenseitigen Ableitbarkeit steht. Entsprechende Definitionen werden für Disjunktion, Implikation, klassische und intuitionistische Negation, universale und existentielle Quantifikation, sowie auch für die modalen Verknüpfungen der Notwendigkeit, Möglichkeit usw. aufgestellt. Die Hilfsmittel, die in der Metasprache benutzt werden, um aus diesen Definitionen die notwendigen Folgerungen zu gewinnen, sind die positive Logik und die Regeln zum Gebrauch der Identität und der universalen Quantifikation.

Ackermann (Lüdenscheid).

Ridder, J.: Über den Aussagen- und den engeren Prädikatenkalkül. II. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 50, 24—30 (1947).

Es ist in der logischen Literatur lange bekannt, daß man den Aussagenkalkül auf vielerlei Arten aufbauen kann, je nachdem welche Wahrheitsfunktionen zugrunde gelegt werden. Hieraus ergibt sich, daß man z. B. jeden auf die übliche Art aufgebauten Aussagenkalkül dadurch erweitern kann, daß man noch ein Zeichen für das Wahre („ v “) und eines für das Falsche („ λ “) unter die Grundsymbole aufnimmt. Wenn man nämlich richtig interpretiert, sind dies dann Zeichen für die beiden 0-stelligen Wahrheitsfunktionen. — Im ersten Teil seiner Arbeit hat J. Ridder einen so erweiterten Aussagenkalkül unter Zugrundelegung der Alternative und der Negation aufgebaut. Er hat ferner zwei gleichwertige Axiomensysteme, die sich von bekannten nur unwesentlich unterscheiden, angegeben. Außerdem hat

er gezeigt (was auch bekannt ist), daß man den so erweiterten Kalkül als eine Boolesche Algebra interpretieren kann. — Im vorliegenden zweiten Teil werden nun noch die weiteren landläufigen Eigenschaften dieses erweiterten Aussagenkalküls formuliert und bewiesen, nämlich die Widerspruchsfreiheit, die Unabhängigkeit (sowohl der Axiome als der Schlußregeln) und die Vollständigkeit. Außerdem wird ein gegenüber dem üblichen etwas allgemeineres Dualitätstheorem bewiesen. — Der Wf.-Beweis wird zunächst in der üblichen Weise durch Interpretation mit zwei Werten geführt. Darüber hinaus wird ausgeführt, daß man auch eine Interpretation mit $2n$ (wo n irgendeine natürliche Zahl ist) Werten angeben kann. Das ist nicht weiter verblüffend, wenn man den bekannten Zusammenhang mit den Booleschen Algebren beachtet. — Im letzten Teil der Arbeit wird dann noch kurz ausgeführt, daß eine ähnliche Erweiterung sich auch beim Prädikatenkalkül der ersten Stufe ohne Identität durchführen läßt. Auch in diesem Teil bietet die Arbeit kaum etwas, was nicht schon in den einschlägigen Arbeiten, insbesondere denen der Warschauer Logiker, implizit enthalten ist. Da diese Arbeiten nicht genannt werden, ist zu vermuten, daß sie dem Autor nicht zugänglich gewesen sind. *Karl Schröter* (Berlin).

Algebra und Zahlentheorie.

Allgemeines. Kombinatorik:

● Ball, W. W. R.: Mathematical recreations and essays. Rev. by H. S. M. Coxeter. New York: The Macmillan Company 1947. XVI, 418 S.

Armsen, P. und H. Rohrbach: Sequenzen in Permutationen. Ber. Math.-Tagung Tübingen 1946, 36—37 (1947).

Smith, C. A. B.: The counterfeit coin problem. Math. Gaz., London **31**, 31—39 (1947).

„Unter 12 gleichartigen Münzen befindet sich höchstens eine falsche mit einer Gewichtsdivergenz unbekannten Vorzeichens. Durch höchstens 3 Wägungen (nur Münzen auf den Waagschalen) ist festzustellen: 1. ob eine falsche Münze da ist; wenn ja, 2. welche es ist; 3. ob sie schwerer oder leichter ist als die andern!“ — Für sehr allgemeine Aufgaben solcher Art gibt Verf. vollständige Theorien auf Grund eines eleganten Reduktionsverfahrens, in das die Ungewißheit von 1. bemerkenswerterweise als fiktive Münze eingeht. *R. Sprague* (Berlin).

Williams, G. T. and D. H. Browne: A family of integers and a theorem on circles. Amer. math. Monthly **54**, 534—536 (1947).

Verf. geht von 2 Einheitskreisen k_1 und k_2 aus, die einander berühren und die gemeinsame Tangente L haben; k_1 , k_2 und L bestimmen ein Kreisbogendreieck, dem ein Kreis k_3 vom Radius $1/4$ einbeschrieben ist. Weiter werden dann k_1 , k_3 und L sowie k_2 , k_3 und L je durch einen weiteren Kreis k_4 bzw. k_5 vom Radius $1/9$ berührt usw. Es ergeben sich nach n Schritten schließlich 2^{n+1} Kreise mit den Radien $\left(\frac{1}{A_v^n}\right)$, die

alle L berühren und wovon außerdem jeder seine beiden Nachbarn berührt. Die A_v^n bilden dann ein merkwürdiges Zahlendreieck, das ähnlich wie das Pascaldreieck gebildet wird, jedoch so, daß jede neue Zeile außer den Summen von Nachbargliedern auch noch die Glieder der vorherigen Zeile selber enthält. Dies Zahlendreieck besitzt bemerkenswerte zahlentheoretische Eigenschaften, z. B.: die Summe der n -ten Zeile lautet $3^n + 1$, die größten Zahlen in den Zeilen bilden eine Fibonaccifolge und jede Zahl $m > 1$ kommt in fast allen Zeilen genau $\varphi(m)$ -mal vor. *Burau*.

Lineare Algebra. Polynome. Invariantentheorie:

Greville, T. N. E.: Remark on the note „A generalization of Waring's formula“. Ann. math. Statist., Ann Arbor **18**, 605—606 (1947).

Trotz seiner Bemühungen wurde Verf. erst nachträglich bekannt, daß sich die

in Frage stehende Formel [die Note erschien in Ann. math. Statist., Ann Arbor 15, 218—219 (1944)] im wesentlichen bereits bei Hermite [Sur la formule d'interpolation de Lagrange, J. reine angew. Math. 84, 70—79 (1878)] findet. Dueball.

Bruijn, N. G. de and T. A. Springer: On the zeros of a polynomial and of its derivative. II. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 50, 458—464 (1947).

Bezeichnen z_1, z_2, \dots, z_n bzw. $z'_1, z'_2, \dots, z'_{n-1}$ die Nullstellen eines Polynoms $f(z)$ n -ten Grades bzw. seiner Derivierten und ist $p \geq 1$, so bestehen die Ungleichungen

$$n^{-1} \sum_{k=1}^n |\operatorname{Im} z_k|^p \geq (n-1)^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} |\operatorname{Im} z'_k|^p \text{ und } n^{-1} \sum_{k=1}^n |z_k|^p \geq (n-1)^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} |z'_k|^p.$$

Die Arbeit enthält auch mehrere Verallgemeinerungen dieser Sätze. Für den Fall, daß $f(z)$ lauter reelle Koeffizienten oder lauter rein imaginäre Nullstellen hat, wurden diese Sätze in einer früheren Arbeit von de Bruijn bewiesen [Proc. Akad. Wet. Amsterdam 49, 1037—1044 (1946)]. Gy. v. Sz. Nagy (Szeged).

Bruijn, N. G. de: Inequalities concerning polynomials in the complex domain. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 50, 1265—1272 (1947).

Mit Hilfe der Gauß-Lucas'schen Satzes wird ein Satz von S. Bernstein elementar so verallgemeinert: Ist $P(z)$ bzw. $Q(z)$ ein Polynom vom Grad n bzw. N ($\geq n$), enthält der abgeschlossene Konvexbereich B jede Nullstelle von $Q(z)$ und gilt die Ungleichung $|P(z)| \leq |Q(z)|$ in jedem inneren Punkte z von B , so gilt auch die Ungleichung $|P'(z)| \leq |Q'(z)|$. Mit Hilfe des Laguerreschen Satzes über die Nullstellenverteilung eines Polynoms und seiner Ableitung in bezug auf einen Punkt beweist Verf. eine Erweiterung eines Satzes von Schaaek-van der Corput und erhält daraus leicht den Erdős-Lax'schen Satz: Gilt die Ungleichung $0 < |P(z)| \leq 1$ für das Polynom $P(z)$ n -ten Grades in jedem Punkte des Kreises $K: |z| \leq 1$, so gilt auch die Ungleichung $|P'(z)| \leq n/2$. Andere Verallgemeinerungen werden aus dem Graceschen Satz über apolare Polynome gefolgert. Endlich wird die Zygmundsche Ungleichung zwischen den absoluten Integralen der p (≥ 1)-ten Potenzen eines Polynoms und seiner Ableitung auf dem Einheitskreis K in dem Falle verschärft, daß das Polynom innerhalb von K nicht verschwindet.

Gyula v. Sz. Nagy (Szeged).

Harlaar, K.: Die Sylvestersche Determinante. Nieuw Tijdschr. Wiskunde 35, 174—178 (1947) [Holländisch].

Am Spezialfall zweier Polynome 4. Grades wird ein elementarer Beweis für den bekannten Satz besprochen, daß für die Existenz einer gemeinsamen Nullstelle zweier Polynome in x das Verschwinden der aus den Koeffizienten gebildeten Sylvesterschen Determinante notwendig und hinreichend ist. Charakteristisch ist dabei, daß der schwierigere Beweis für das Hinreichen der Bedingung gewissermaßen die unmittelbare Umkehrung der ganz einfachen Überlegungen darstellt, mit denen man üblicherweise ihre Notwendigkeit zeigt. Krull (Bonn).

Thijssen, W. P.: Über eine Determinante. Nieuw Tijdschr. Wiskunde 35, 210 bis 216 (1947) [Holländisch].

Es werden die n Variablen x_1, \dots, x_n einer allgemeinen linearen homogenen Transformation $y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k$ unterworfen, und es werden die irgendwie durchnumerierten Potenzprodukte s -ten Grades in y_1, \dots, y_n linear durch die entsprechenden Potenzprodukte in x_1, \dots, x_n dargestellt:

$$y_1^{p_1} \dots y_n^{p_n} = F_p(y) = \sum_{q=1}^N \frac{F_{pq}}{q_1! \dots q_n!} \cdot F_q(x) \quad [F_q(x) = x_1^{q_1} \dots x_n^{q_n}].$$

Dann wird elementar rechnerisch der Satz bewiesen, daß zwischen den Determinanten $|a_{ik}|$ ($i, k = 1, \dots, n$) und $|F_{pq}|$ ($p, q = 1, \dots, N$) stets eine Beziehung $|F_{pq}| = C \cdot |a_{ik}|^t$ [$t = (s+n-1)$] besteht, wobei C ein Zahlfaktor ist. Krull (Bonn).

Klee, V. L. jr.: On completing a determinant. Amer. math. Monthly **54**, 96–97 (1947).

Ist d der größte gemeinsame Teiler der ganzen Zahlen $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$, so gibt es ganze Zahlen a_{ji} ($j = 2, 3, \dots, n; i = 1, 2, \dots, n$) derart, daß die Determinante $|a_{ji}| = d$ ist. Verf. beweist dies unter Benutzung einer geeigneten Basis eines Linearformenmoduls über dem Ring der ganzen Zahlen. *Rohrbach* (Mainz).

Ferrar, W. L.: The simultaneous reduction of two real quadratic forms. Quart. J. Math. (Oxford Ser.) **18**, 186–192 (1947).

Man kann eine reelle quadratische Form $x'Ax$ und eine reelle definite quadratische Form $x'Cx$ simultan in Quadratsummen $\sum \lambda_\nu y_\nu^2$ und $\sum y_\nu^2$ transformieren, indem man n Eigenlösungen X_ν von $(A - \lambda_\nu C)X_\nu = 0$, durch die Forderung $X'_\mu CX_\nu = \delta_{\mu\nu}$ orthonormiert, zu einer (n, n) -Matrix T zusammenfaßt und $x = Ty$ setzt. Die bei der Durchführung dieses nicht neuen Gedankens auftretenden Formeln werden ausführlich zusammengestellt. *Wielandt* (Mainz).

Turnbull, H. W.: Note on the simultaneous system of two quadratic quaternary forms. J. London math. Soc. **22**, 147–152 (1947).

Verf. stellte in den Proc. London math. Soc. **18**, 69–94 (1919) ein vollständiges System der Komitanten von 2 quadratischen quaternären Formen auf. Das System bestand aus 125 angeblich irreduziblen Formen. Es zeigte aber Williamson [J. London math. Soc. **4**, 182–183 (1929)], daß drei dieser Formen reduzibel sind. Nun fand der Verf., daß weitere 5 Formen reduzibel sind. *Hofreiter*.

Gruppentheorie:

Brauer, Richard: On a conjecture by Nakayama. Trans. R. Soc. Canada, Sect. III, III. s. **41**, 11–19 (1947).

Robinson, G. de B.: On a conjecture by Nakayama. Trans. R. Soc. Canada, Sect. III, III. s. **41**, 20–25 (1947).

Bekanntlich kann man jede irreduzible Darstellung der symmetrischen Gruppe \mathfrak{S}_n durch ein Young-Diagramm kennzeichnen. Für jede Primzahl p ergibt sich eine Einteilung dieser Darstellungen in Blöcke. In den beiden vorliegenden Arbeiten wird eine von Nakayama vermutete Regel [Jap. J. Math. **17**, 411–423 (1941)] bewiesen, die zu entscheiden gestattet, wann zwei durch ihre Diagramme gegebenen Darstellungen von \mathfrak{S}_n zum selben Block gehören. Unter einem Haken (hook) eines Diagramms verstehe man einen Punkt X , alle Punkte unterhalb X und alle Punkte rechts von X . Ein p -Haken ist ein Haken, der aus p Punkten besteht. Den p -Kern (core) eines Diagramms erhält man, wenn man so lange wie möglich p -Haken daraus fortstreicht. Nach Nakayama ist der Kern eines Diagramms eindeutig bestimmt. Die Regel heißt nun: Dann und nur dann gehören zwei irreduzible Darstellungen von \mathfrak{S}_n zum selben p -Block, wenn ihre Diagramme den gleichen p -Kern besitzen. — Eine wichtige Rolle beim Beweise spielt die Fehlgruppe (defect group) eines Blocks [vgl. R. Brauer, Proc. nat. Acad. Sci. USA **30**, 109–114 (1944); **32**, 182–186, 215–219 (1946)]. Mit nichtnegativen ganzen Zahlen α und β setze man $n = \alpha + \beta p$ und betrachte die Gruppe aller Permutationen von $\alpha + 1, \alpha + 2, \dots, n$, welche die Zyklen $(\alpha + 1, \dots, \alpha + p)$, $(\alpha + p + 1, \dots, \alpha + 2p)$, \dots , $(n - p + 1, \dots, n)$ nur untereinander vertauschen. Als Fehlgruppen der Blöcke von \mathfrak{S}_n treten die p -Sylowgruppen $\mathfrak{D}^{(\beta)}$ dieser letzteren inprimitiven Gruppen für die verschiedenen Werte von β auf. Die Anzahl der zu einem $\mathfrak{D}^{(\beta)}$ gehörigen Blöcke ist gleich der Anzahl der irreduziblen Darstellungen von \mathfrak{S}_α , deren Grade durch die höchste in $\alpha!$ enthaltene Potenz von p teilbar sind. *Kochendörffer* (Greifswald).

Godément, R.: Sur les relations d'orthogonalité de V. Bargmann. I. Résultats préliminaires. C. r. Acad. Sci., Paris **225**, 521–523 (1947).

Godément, R.: Sur les relations d'orthogonalité de V. Bargmann. II. Démonstration générale. C. r. Acad. Sci., Paris **225**, 657–659 (1947).

A partir de la lemme de Schur sur les conditions d'équivalence (isomorphisme)

de deux représentations unitaires irréductibles d'un groupe G , l'auteur généralise les relations d'orthogonalité trouvées par V. Bargmann dans le cas du groupe de Lorentz, c'est-à-dire du groupe projective de la ligne [V. Bargmann, Irreducible unitary representations of the Lorentz group. Ann. Math., Princeton, II. s. 48, 568—640 (1947)] à tous les groupes localement compacts. Ces relations d'orthogonalité analogues à celles connues pour les groupes compacts sont le contenu du théorème suivant: Si $\{\mathfrak{H}, V_x\}$ et $\{\mathfrak{H}', V'_x\}$ sont deux représentations unitaires continues irréductibles non-équivalentes du même groupe G localement compact, contenues dans la représentation „régulière“ $\{L^2, U_x\}$ de G sur l'espace de Hilbert L^2 des fonctions de carré sommable de G sur la mesure de Haar dx ($U_s f(x) = f(s^{-1}x)$); alors, quels que soient $X, Y, X_1, Y_1 \in \mathfrak{H}$ et $X', Y' \in \mathfrak{H}'$, les fonctions $(X, V_x Y)$ etc. sont de carré sommable, $\int_G (X, V_x Y) \overline{(X', V'_x Y')} dx \equiv 0$ et il existe une constante positive λ telle que $\int_G (X, V_x Y) \overline{(X_1, V_{x_1} Y_1)} dx \equiv \lambda (X, X_1) \overline{(Y, Y_1)}$. J. Aczél.

Riss, J.: Représentations continues des groupes topologiques abéliens dans le groupe additif des nombres réels. C. r. Acad. Sci., Paris 224, 987—988 (1947).
 Riss, J.: Sur les représentations réelles des groupes topologiques abéliens. C. r. Acad. Sci., Paris 224, 1095—1097 (1947).

Dans la première note l'auteur s'occupe des représentations continues des groupes topologiques abéliens G sur le groupe additif des nombres réels R et donne une partie du groupe G dont la représentation détermine la représentation du groupe entier. Il trouve cette partie par le procédé suivant: Une partie A d'un groupe G est dite stable si elle contient avec toute paire d'éléments aussi leur produit (la plupart des auteurs appelle cela un „semi-groupe“, dans cette note „semi-groupe“ a une signification différente). Une partie A de G est convexe si $x^n \in A^n$ entraîne $x \in A$, ce qu'on pourrait exprimer ainsi que avec tout n -tuple d'éléments A contient aussi leur „moyenne“ existante dans G . Pour toute partie A de G il existe une plus petite partie stable $A^\infty \supset A$ et une plus petite partie convexe $k(A) \supset A$. [$k(\{e\})$ est évidemment l'ensemble des éléments d'ordre fini de G .] Le théorème connu de Zorn montre qu'ils existent aussi des parties stables maximales contenues dans une partie quelconque de G . — L'auteur exclut $k(\{e\})$ de G et il appelle les parties stables maximales du reste du groupe „semi-groupes“ S (c'est-à-dire ici un semi-groupe ne peut point contenir l'élément neutre e). Alors il définit pour $s \in S$: $P(s, S) = (s^{-1}S)^\infty$ et $G(s, S) = P \cap P^{-1}$ est la partie cherchée du groupe G , comme l'auteur donne explicitement la représentation de $G(s, S)$ sur R et il montre que cette représentation peut être prolongée en une représentation du groupe entier G et que toute représentation de G dans R peut s'obtenir par ce procédé.

Le convexe topologique $K(A)$ d'une partie $A \subset G$ est définie par $K(A) = \bigcap_{V \in \mathfrak{B}} k(A \cap V)$ où \mathfrak{B} est un système fondamental de voisinages de e . Pour que G soit continuellement représentable dans R il faut et il suffit que $K(\{e\}) \neq G$. Si le groupe d'automorphismes de G est transitif on a $K(\{e\}) = e$ ou $K(\{e\}) = G$.

Dans la seconde note l'auteur étudie le prolongement de la représentation définie sur un sous-groupe H du groupe topologique abélien G . Il montre, que cette représentation peut toujours être prolongée aux éléments du convexe topologique $K(H)$ en donnant la méthode de prolongement qui est la seule possible. — L'auteur examine aussi quand est ce qu'une représentation est un homomorphisme. Un groupe G est dit localement convexe si tous voisinages V de e contient un autre voisinage W de e telle que $k(W) \subset V$. Un sous-groupe H de G est dit convexe topologique maximal de G si $K(H) = H$ et si $H \subset H'$ entraîne $K(H') = G$. Il faut et il suffit que $H = f^{-1}(0)$ (l'ensemble des éléments où f s'annule) soit un convexe topologique maximal de G et que le groupe G/H soit cyclique discret ou non-discret localement convexe pour

que la représentation continue f de G sur R soit un homomorphisme. Inversement si un sous-groupe H de G satisfait à ces conditions il existe une représentation continue de G dans R et une seule non identiquement nulle s'annulant sur H et c'est un homomorphisme. Ceci montre que la généralisation pratique de la notion des formes linéaires sur un espace vectoriel aux groupes topologiques abéliens n'est pas la notion de représentation mais celle du homomorphisme, vu qu'il peut exister une infinité de représentations différentes s'annulant sur un même sous-groupe de G une partie de ces représentations pouvant être continues sans qu'il en soit ainsi de toutes.

J. Aczél (Budapest).

Kuntzmann, J.: Opérations multiformes qui s'obtiennent à partir d'opérations uniformes. C. r. Acad. Sci., Paris **224**, 177—179 (1947).

Etant donné un monoïde U , une famille Σ de sous-ensembles de U telle que tout élément de U appartienne au moins à un ensemble de Σ , l'a. définit une loi de composition multiforme entre éléments A, B de Σ en faisant correspondre à ce couple tout élément $C \in \Sigma$ tel qu'il existe $a \in A, b \in B$ tels que $a b \in C$. L'a. montre par un exemple qu'un hypergroupe quelconque ne peut pas toujours être défini de la sorte. Il montre aussi que si Σ est obtenu ainsi à partir d'un monoïde U , il est isomorphe à un système multiforme Σ' obtenu de manière analogue à partir d'un monoïde libre U' , Σ' étant en outre une partition de U' . *J. Dieudonné (Nancy).*

Zahlkörper. Funktionenkörper:

Inkeri, K.: Über den Euklidischen Algorithmus in quadratischen Zahlkörpern. Ann. Acad. Sci. Fennicae, A I, Nr. 41, 34 S. (1947).

Bezeichne m eine quadratfreie ganze Zahl ($\neq 1$). Alle bisherigen Nichtexistenzbeweise für den E.A. (= Euklidischer Algorithmus) im quadratischen Zahlkörper $K(\sqrt{m})$ gründeten sich auf das Lemma von Behrbom und Ref. (dies. Zbl. **13**, 198) mit Ausnahme einer Arbeit des Ref. (dies. Zbl. **21**, 200). Verf. verfeinert letztere Methode, zieht auch die Theorie der Kettenbrüche heran und erzwingt den Nichtexistenzbeweis in den sehr schweren „kritischen“ Fällen $m = 193, 241, 313, 337, 457, 601$ (das sind lauter Primzahlen $\equiv 1 \pmod{24}$) mit „großer“ Grundeinheit). Da nunmehr die $m < 5000$ mit E.A. bekannt sind, nämlich $m = -11, -7, -3, -2, -1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 17, 19, 21, 29, 33, 37, 41, 57, 73, 97$, so spricht er die Vermutung aus, daß der E.A. überhaupt nur in diesen 22 Fällen existiert, wobei nur noch die primen $m \equiv 1 \pmod{24}$ mit $5000 < m < e^{250}$ nachzuprüfen bleiben. Mit derselben Methode werden auch frühere Nichtexistenzbeweise (von Berg, A. Brauer, Rédei) vereinigt, betreffend die Primzahlen $m \not\equiv 1 \pmod{24}$, wobei jedoch der Brauersche Fall $m \equiv 13 \pmod{24}$ nur teilweise neu behandelt wird. *Rédei (Szeged).*

Min, Szu-Hoa: On the Euclidean algorithm in real quadratic fields. J. London math. Soc. **22**, 88—90 (1947).

Es wird berichtet, daß sich die obere Grenze $p < e^{250}$ von Hua für die quadratischen Zahlkörper $K(\sqrt{p})$ mit E.A. (s. vorsteh. Referat) auf $p < e^{34}$ herabdrücken läßt (p Primzahl), vorausgesetzt, daß $2, \dots, 19$ quadratische Reste mod p sind, eine Annahme, die man wahrscheinlich beseitigen kann. Der sehr lange Beweis wird nicht mitgeteilt, nur kurz angedeutet. Das Verfahren gründet sich auf das Lemma von Behrbom und Ref., ist eine Verschärfung des Beweises von Erdős und K-o und stützt sich wesentlich auf verschiedene Abschätzungen von

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p \quad \text{und} \quad \vartheta_1(x) = \int_0^x \vartheta(t) dt. \quad (\text{Würde man die Schranke etwa auf } p < e^{18}$$

herabdrücken, so könnte man diese Fälle schon numerisch nachprüfen.) *Rédei.*

Faddeev, D. K.: Über die charakteristischen Gleichungen der rationalen symmetrischen Matrizen. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. **58**, 753—754 (1947) [Russisch].

k sei ein total reeller Körper vom Grade $n \leq 7$ über dem Körper der rationalen

Zahlen; k enthalte Zahlen λ mit beliebig vorzuschreibender Vorzeichenverteilung der Konjugierten, deren Hauptideal ein Quadrat ist: $(\lambda) = a^2$. Dann gibt es eine Darstellung von k durch rationalzahlige symmetrische Matrizen des Grades n , in welchen zu ganzen Zahlen aus k nur ganze Elemente auftreten. *Wielandt*.

Vandiver, H. S.: Limits for the number of solutions of certain general types of equations in a finite field. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **33**, 236—242 (1947).

Bezeichne $F(p^t)$ den endlichen Körper mit p^t Elementen (p Primzahl), g ein primitives Element der zyklischen Gruppe der Elemente ($\neq 0$) von $F(p^t)$, m einen Teiler von $p^t - 1$ ($p^t = 1 + m c$), (i, j) die Anzahl der Paare r, s ($= 0, \dots, m-1$) mit $1 + g^{i+rm} = g^{j+sm}$. [Im wesentlichen handelt es sich um die Anzahl der Lösungen x^m, y^m einer Gleichung $1 + a x^m = b y^m$ in $F(p^t)$.] Es wird auf Grund einer Formel von Mitchell (*Trans. Amer. math. Soc.* **17**, 165—177 (1916); dieses Zitat steht in der Arbeit fehlerbehaftet] bewiesen, daß für $A_{hk} = \sum_{i,j=0}^{m-1} (i, j)(i+h, j+k)$ gilt: $A_{00} = (c-1)^2 + c(m-1)$, $A_{h0} = A_{0h} = A_{hh} = c^2 - c$, $A_{hk} = c^2$ ($h, k = 1, \dots, m-1$; $h \neq k$). (Ref. wird den Beweis in den *Comm. Math.* wesentlich verkürzen.) Verfasser verspricht Anwendungen für die Lösungszahl der Gleichung $c_1 x_1^{a_1} + \dots + c_s x_s^{a_s} + c_{s+1} = 0$ in $F(p^t)$. *Rédei* (Szeged).

Schmid, H. L.: Zur algebraischen Theorie der Formen. I. *Math. Ann.*, Berlin **120**, 1—9 (1947).

Den Kern der Arbeit bildet der Beweis des Hauptsatzes: Es seien x_1, \dots, x_n Unbestimmte über dem Körper K ; y_1, \dots, y_n seien homogene Formen in x_1, \dots, x_n von den Graden g_1, \dots, g_n , und es sei die Resultante R der y_i von 0 verschieden. Dann hat der Integritätsbereich $K[x_1, \dots, x_n]$ über dem Integritätsbereich $K[y_1, \dots, y_n]$ eine Modulbasis von $g = g_1 \dots g_n$ linear unabhängigen Elementen. — Zunächst erledigt sich leicht der Fall, daß die y_i^* allgemeine Formen mit unbestimmten Koeffizienten sind. Anschließend wird dann mit Hilfe einiger Bemerkungen über die Zusammenhänge zwischen den Lösungszahlen gewisser linearer diophantischer Gleichungen gezeigt, den bei beliebigen y_i eine (sicher existierende) nur aus Potenzprodukten bestehende, linear unabhängige Modulbasis von $K[x_1, \dots, x_n]$ über $K[y_1, \dots, y_n]$ stets auch eine derartige Modulbasis von $K[x_1, \dots, x_n]$ über $K[y_1^*, \dots, y_n^*]$ darstellt. — Als Anwendung wird gezeigt, daß ein von O. Teichmüller stammender, von ihm nur mit Hilfe analytischer Hilfsmittel bewiesener Satz über ganz-algebraische Abhängigkeit eine einfache algebraische Anwendung des Hauptsatzes darstellt. *Krull* (Bonn).

Zahlentheorie:

Schmidt, E.: Neue Mersennesche Zahlen. *Elementa*, Stockholm **30**, 89 (1947) [Schwedisch].

Angabe von Teilern von 58 Mersenneschen Zahlen $2^q - 1$ für Primzahlen q zwischen 283 und 2459. Eine Anzahl dieser Teiler wurde mit Hilfe des Satzes von Euler gewonnen: Ist q von der Form $4k + 3$, so ist $2^q - 1$ durch $2q + 1$ teilbar, wenn $2q + 1$ eine Primzahl ist.

H. L. Schmid (Berlin).

Wahlgreen, Agne: Faktoren der Zahlen $a^p + 1$. *Elementa*, Stockholm **30**, 81—88 (1947) [Schwedisch].

p und $P = 2n + 1$ seien Primzahlen, g Primitivwurzel modulo P , $a \equiv g^t \pmod{P}$. Die Bedingung für das Bestehen der Kongruenz $a^p \equiv 1 \pmod{P}$ lautet: $n = sp$ und $t = k \cdot 2s$. Die Bedingung für das Bestehen der Kongruenz $a^p \equiv -1 \pmod{P}$ lautet: $n = sp$ und $t = k \cdot s$ mit ungeradem k . Eingehende Diskussion der Fälle $a = 2, 3$ und 5 . *H. L. Schmid* (Berlin).

Banerjee, D. P.: On the divisors of numbers. *Bull. Calcutta math. Soc.* **39**, 57—58 (1947).

$E(n)$ sei das Übergewicht der Anzahl der Teiler der Form $4m + 1$ über die der Teiler der Form $4m + 3$ bei einer natürlichen Zahl n . Verf. leitet aus der fast

trivialen Formel $E(n) = \sum_{d|n} \sin d/2$ die folgende ab:

$$\sum E(n) q^n/n = -\log \prod [(1 - q^{4j+1})/(1 - q^{4j+3})],$$

wo das Vorzeichen in der Arbeit unrichtig gegeben ist. Er zeigt noch einige ähnliche Formeln.

Holzer (Graz).

Davenport, H.: On a theorem of Markoff. J. London math. Soc. 22, 96—99 (1947).

Es wird ein einfacher arithmetischer Beweis für folgenden bekannten Satz gegeben: Ist $Q(x, y, z)$ eine indefinite quadratische Form mit der Determinante $D \neq 0$, dann existieren ganze Zahlen $x, y, z \neq 0, 0, 0$, für die $|Q(x, y, z)| \leq \sqrt[3]{\frac{2}{3}} |D|$. Das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn Q äquivalent mit $C(x^2 + y^2 - z^2 + xz + yz)$ ist.

Hofreiter (Wien).

Varnavides, P.: Non-homogenous binary quadratic forms. I. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 51, 396—404 (1948).

Verf. überträgt die von H. Davenport (dies. Zbl. 29, 112) für den Körper von $\sqrt{5}$ erhaltenen Ergebnisse in vollständiger Analogie auf den Körper von $\sqrt{2}$. Sei $\alpha = (a, a')$ ein reelles Zahlpaar und durchlaufe $\mathfrak{x} = (\xi, \xi')$ alle Paare konjugierter ganzer Zahlen aus dem Körper von $\sqrt{2}$. Mit $\alpha \bmod. +1$ sei die Klasse aller $\alpha + \mathfrak{x}$ bezeichnet. Es handelt sich um die untere Grenze $M(\alpha)$ von $|N(\mathfrak{x} - \alpha)| = |\xi - a| |\xi - a'|$. Speziell seien $\epsilon = (\eta, \eta')$ die den Einheiten η und $\omega_n = (\omega_n, \omega'_n)$ die den Zahlen $\omega_n = \sqrt{2} \frac{\epsilon^{n+1} - 1}{\epsilon^n - 1}$ aus dem Körper von $\sqrt{2}$ zugeordneten Zahlpaare ($\epsilon = 1 + \sqrt{2}$ die Grundeinheit). Dann lauten die Ergebnisse: Ist $\alpha \equiv \frac{1}{2} \epsilon \bmod. +1$, so ist $M(\alpha) = \frac{1}{2}$; und ist $\alpha \equiv \frac{\epsilon}{\omega_n} \bmod. +1$ mit festem ungeraden $n \geq 1$, so ist $M(\alpha) = \frac{1}{N(\omega_n)}$; dabei werden die Minima jeweils für unendlich viele \mathfrak{x} angenommen. In jedem anderen Falle ist $M(\alpha) \leq \frac{1}{2\epsilon}$. Die Folge $N(\omega_n)$ wächst monoton vom Werte 4 (für $n = 1$) gegen den Grenzwert $2\epsilon = 4,828 \dots$ (für $n \rightarrow \infty$).

Hasse (Berlin).

Analysis.

Allgemeines:

● **Perron, Oskar:** Irrationalzahlen. 3. fast unveränderte Aufl. Berlin: W. de Gruyter & Co. (Göschens Lehrbücherei Bd. 1) 1947. VIII, 199 S., RM. 10.—

● **Sherwood, C. E. F. and A. E. Taylor:** Calculus. Revised Edition. New York: Prentice-Hall, Inc. 1947. XII, 568 S.

● **Fremberg, N. E.:** Mathematische Aufgabensammlung, Erster Kurs. 3. Aufl. Lund: Studenskårs intressebyrå 1947, 54 s. [Schwedisch].

● **Losada y Puga, Christóbal de:** Lehrbuch der Analysis. II. Lima: Editorial Lumen 1947. 700 p. [Spanisch].

● **Reddick, H. W. and F. H. Miller:** Advanced mathematics for engineers. 2. ed. New York: J. Wiley & Sons, Inc. 1947. XII, 508 S.

● **Stigant, S. A.:** Modern electrical engineering mathematics. Hutchinson 1947. 369 p. 31 s. 6 d.

Differentiation und Integration reeller Funktionen:

Ridder, J.: Eine Bemerkung über das Maß in Strukturen. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 50, 607—611 (1947).

In einem Booleschen Verband, der ein topologischer Raum (Hülle a) ist und

eine Maßfunktion (Maß $m(a)$) besitzt, sind folgende Axiome gleichwertig:

1. $v = \bar{v} \Rightarrow m(w) = m(w \wedge v) + m(w - w \wedge v)$
2. $\bar{x} \wedge y = 0 \Rightarrow m(x \vee y) = m(x) + m(y),$

wie sich durch die Substitution $w = x \wedge y, v = x$ bzw. $x = w \wedge v, y = w - x$ ergibt.

Lorenzen (Bonn).

Maharam, D.: An algebraic characterization of measure algebras. *Ann. Math., Princeton*, II. s. 48, 154—167 (1947).

Es werden rein algebraische Bedingungen angegeben, welche notwendig und hinreichend sind dafür, daß auf einer nicht-atomaren Booleschen σ -Algebra eine reelle, nicht-negative, abzählbar-additive, endliche, nur für das Nullelement verschwindende Funktion existiert.

Nöbeling (Erlangen).

Natanson, J. P.: Über eine Ungleichung. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, II. s. 56, 911—913 (1947) [Russisch].

Verf. beweist folgenden Satz, der als Verallgemeinerung des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung und des Lagrangeschen Mittelwertsatzes betrachtet

werden kann: Falls $f(x)$ in (a, b) integrierbar und $\left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq M(x-a)$ ist, dann

gilt für eine willkürliche nicht-negative abnehmende Funktion $g(x)$: $\left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right|$

$\leq M \int_a^b g(x) dx$ (das Integral rechts existiert natürlich immer, Verf. beweist, daß auch jenes links existiert). — Der Beweis erfolgt durch zweimalige partielle Inte-

gration des Stieltjesschen Integrals $\int_a^b f(x) g(x) dx = \int_a^b g(x) d \left[\int_a^x f(t) dt \right]$ mittels der

trivialen Abschätzung $\int_a^x g(x) dx \geq g(x)(x-a)$, wo $a < x < b$ und x am Ende gegen

a strebt. Verf. weist auch — ohne auf Einzelheiten einzugehen — auf Anwendungen der gewonnenen Ungleichung auf Fragen in Zusammenhang mit Integralen in singulären Punkten hin. [Eratum: das letzte Integral in der Formel (8), S. 912, lautet

richtig: $\int_a^b g(x) dx$].

J. Aczél (Budapest).

Tibaldo, L.: Un teorema sulle funzioni misurabili rispetto ad una e continue rispetto ad un'altra variabile. Applicazioni. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur.*, VIII. s. 2, 146—152 (1947).

Lo scopo principale dell'Autrice è di dimostrare che: Se $f(x, y)$ è una funzione definita nel rettangolo $R, a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$, misurabile rispetto ad x in $a \leq x \leq b$ per ogni y di $c \leq y \leq d$ prefissato e continua rispetto ad y in $c \leq y \leq d$ per ogni fissato x di $a \leq x \leq b$, dato un numero positivo ε , si può determinare una porzione misurabile I di $a \leq x \leq b$, di misura maggiore di $b-a-\varepsilon$, tale che $f(x, y)$ sia uniformemente continua rispetto ad y nella porzione di R costituita da quei punti che hanno l'ascissa in I . L'Autrice deduce di qui un'altra dimostrazione del fatto che l' n -esima approssimazione di Carathéodory-Tonelli per l'equazione

$$y(x) = \eta + \int_{\xi}^x f(t, y(t)) dt$$

dipende con continuità dai valori di ξ ed η , se $f(x, y)$ è continua rispetto ad y e misurabile rispetto ad x nella striscia $a \leq x \leq b, -\infty < y < +\infty$, riuscendovi inoltre in modulo minore di una funzione della sola x sommabile in $a \leq x \leq b$.

G. Scorza Dragoni (Padova).

Good, I. J.: A note on positive determinants. J. London math. Soc. **22**, 92—95 (1947).

Es wird bewiesen: Sind $\Phi_s(x)$, $s = 1, \dots, n$, n im Intervall $[B, A]$ integrierbare Funktionen, und ist die n -reihige Determinante $\Delta = \det \{\Phi_s(x_r)\} \geq 0$, sofern $A \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq B$, so gilt $\det \left\{ \int_{b_r}^{a_r} \Phi_s(x) dx \right\} \geq 0$ immer dann, wenn die $2n$ Zahlen a_r, b_r den Ungleichungen $A \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq B, A \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq B, a_1 \geq b_1, a_2 \geq b_2, \dots, a_n \geq b_n, b_1 \geq a_3, b_2 \geq a_4, \dots, b_{n-2} \geq a_n$ genügen. Daraus ergeben sich Sätze, wie der folgende:

Ist $\Phi(t, x) > 0$ und, falls $t \geq u$, der Quotient $\Phi(t, x) / \Phi(u, x)$ eine nicht fallende Funktion von x , dann ist auch $\int_b^a \Phi(t, x) dx / \int_d^c \Phi(t, x) dx$ eine nicht fallende Funktion von t , wenn nur $a \geq b \geq d$ und $a \geq c > d$. Auf einen dem ersten Satz ähnlichen Satz einfacherer Natur wird aufmerksam gemacht. *Aumann* (Regensburg).

Loève, M.: Remarques sur la majoration de certaines transformées. C. r. Acad. Sci., Paris **225**, 31—33 (1947).

Im Satze von Tagamilitzki-Boas [C. r. Acad. Sci., Paris **223**, 940 (1946) und dies. Zbl. **29**, 24] kann die majorisierende Folge $b_k = \sum_v c_v q_v^k$ ($c_v > 0$)

durch eine beliebige totalmonotone Folge $b_k = \int_0^1 t_k d\beta(t)$ ersetzt werden. — Mit der Boasschen Methode läßt sich u. a. auch der folgende Satz beweisen: Sei $a(x)$ eine reellwertige stetige Funktion auf dem Intervall \mathfrak{J} , und es sei $b(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xt} d\beta(t)$, $\Delta\beta(t) \geq 0$. Damit $a(x)$ die Darstellung $a(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xt} d\alpha(t)$ mit $|\Delta\alpha(t)| \leq \Delta\beta(t)$ zuläßt, ist notwendig und hinreichend, daß

$$\left| \sum_{i,j} a(x_i + x_j) \varrho_i \varrho_j \right| \leq \sum_{i,j} b(x_i + x_j) \varrho_i \varrho_j$$

für jedes endliche System von Punkten $x_i \in \mathfrak{J}$ und reellen Zahlen ϱ_i gilt.

Béla v. Sz. Nagy (Szeged).

Tagamilitzki, Y.: Sur l'équation intégrale de Stieltjes. C. r. Acad. Sci., Paris **225**, 976—978 (1947).

Mit Hilfe der Hausdorffschen Integraldarstellung totalmonotoner Folgen werden die folgenden Sätze bewiesen: 1. Damit die Funktion $f(x)$ in der Umgebung der Stelle $a > 0$ (und folglich auch in der ganzen komplexen Ebene evtl. mit Ausnahme von nichtpositiven reellen x) eine Darstellung $f(x) = \int_0^{\infty} d\alpha(t)/(t+x)$ mit nichtabnehmendem $\alpha(t)$ zuläßt, ist notwendig und hinreichend, daß

$$(-1)^k [x^n f(x)]^{(k+n)} \geq 0, \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{x^v}{v!} f^{(v)}(x) = 0, \quad \sum_{v=0}^{\infty} [x^v f(x)]^{(v)} < \infty$$

für $x = a$; $k, n = 0, 1, 2, \dots$ gilt. — 2. Wenn $f(x)$ die obige Darstellung zuläßt und wenn die (in der Umgebung von $x = a$ reguläre) Funktion $g(x)$ den Ungleichungen

$$|[x^n g(x)]^{(k+n)}| \leq (-1)^k [x^n f(x)]^{(k+n)}$$

für $x = a$; $k, n = 0, 1, 2, \dots$ genügt, dann hat auch $g(x)$ die Form $g(x) = \int_0^{\infty} d\beta(t)/(x+t)$, und zwar mit $|\Delta\beta(t)| \leq \Delta\alpha(t)$. Ist insbesondere $\alpha(t)$ totalstetig, so ist es auch $\beta(t)$. *Béla v. Sz. Nagy* (Szeged).

Tagamlitzki, V.: Sur la majoration de certaines transformées intégrales. C. r. Acad. Sci., Paris 225, 1053—1055 (1947).

Désignons par $N[\lambda(t); t_1, t_2, \dots, t_m]$ la différence divisée d'ordre $m-1$ de la fonction $\lambda(t)$, correspondant aux points différents t_1, t_2, \dots, t_m , c'est-à-dire l'expression $\sum_{i=1}^m \lambda(t_i) F'(t_i)$ où $F(t) = \prod_{i=1}^m (t - t_i)$. Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions susceptibles,

pour $x > a$, des représentations $f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} d\lambda(t)$, $g(x) = \int_0^\infty e^{-xt} d\beta(t)$, $\lambda(t)$ et $\beta(t)$ étant à variation bornée et normalisées, c'est-à-dire $\lambda(0) = \beta(0) = 0$, $2\lambda(t) = \lambda(t-0) + \lambda(t+0)$, $2\beta(t) = \beta(t-0) + \beta(t+0)$. L'auteur montre, à l'aide de la formule d'inversion de l'intégrale de Laplace, due à D. V. Widder, que les inégalités $N[\lambda(t); t_1, t_2, \dots, t_{r+1}] \leq \varepsilon_r N[\beta(t); t_1, t_2, \dots, t_{r+1}]$ ($\varepsilon_r = \pm 1$) ne dépendant pas de t_1, t_2, \dots, t_{r+1} ont lieu pour $r = 0, 1, \dots, n$ si, et seulement si

$$|(x^{r-1} f(x))^{(k+r-1)}| \leq (-1)^{k+r-1} \varepsilon_r (x^{r-1} g(x))^{(k+r-1)}$$

pour $k = 0, 1, 2, \dots$ et $x > a$.

Béla de Sz. Nagy (Szeged).

Allgemeine Reihenlehre :

Agnew, R. P.: A slowly divergent series. Amer. math. Monthly 54, 273—274 (1947).

Für jedes $x > 0$ bezeichne $P(x)$ das Produkt von x und allen denjenigen Zahlen $\log x, \log \log x, \log \log \log x, \dots$, welche > 1 sind. Verf. zeigt mit Hilfe des Integralkriteriums, daß die Reihe $\sum 1/P(n)$ divergiert. V. Garten (Tübingen).

Hamming, R. W.: Subseries of monoton divergent series. Amer. math. Monthly 54, 462—463 (1947).

Es wird der folgende Satz mitgeteilt und dargetan, daß die darin auftretende Bedingung notwendig ist: Sei $I(n)$ eine wachsende Folge verschiedener positiver, ganzer Zahlen und $\sum d_n$ eine monotone divergente Reihe, so stellt die Beschränktheit von $I(n)$ eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Divergenz der Teilreihe $\sum d_{I(n)}$ dar. V. Garten (Tübingen).

Herreijers, H.: Eine elementare Ableitung für die Summe einer hyperharmonischen Reihe mit geradem Exponenten. Nieuw Tijdschr. Wiskunde 35, 179—188 (1947) [Holländisch].

Verf. teilt eine für Kl-Kandidaten ohne Schwierigkeiten lebare Auswertung der Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p}}$ mit (p positiv, ganz). Gebraucht wird — neben den einfachsten Konvergenzsätzen und Limesregeln — aus der Analysis nur die Ungleichung $\sin q < q < \operatorname{tg} q$ (für $0 < q < \pi/2$) und aus der elementaren Algebra der Zusammenhang zwischen den Potenzsummen und den elementar symmetrischen Funktionen. Die Auswertung beruht darauf, daß man in $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{2p}}$ für $\frac{1}{k}$ den Wert $\frac{\pi}{2n+1} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n+1}$ einführt. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{2p}} = \pi^{2p} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n w_k^{2p} \text{ mit } w_k = \frac{1}{(2n+1)} \operatorname{ctg}^2 \frac{k\pi}{2n+1},$$

und der Limes rechts ist gleich der entsprechenden Potenzsumme der Wurzeln von

$$w^n - \frac{1}{3!} w^{n-1} + \frac{1}{5!} w^{n-2} - \dots = 0.$$

Einen anderen, etwas größere Ansprüche stellenden Weg hatte 1944 in derselben Zeitschrift G. R. Veldkamp beschritten (Hyperharmonische reeksen met even exponent, Nieuw. Tijdschr. Wiskunde 32, 141—153).

Pietsch (Berlin).

Ogieveckij, I. E.: Verallgemeinerung der Sätze von Dirichlet und Hadamard auf quasi-gleichmäßig konvergierende Reihen. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 59, 791—794 (1947) [Russisch].

In Verallgemeinerung bekannter Sätze von Dirichlet und Hadamard werden Kriterien für die (im Sinne von E. Borel) quasi-gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenreihe $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(x) u_i(x)$ in einem Intervall $\langle a, b \rangle$ bewiesen, z. B.: Gilt $\alpha_i(x) \rightarrow 0$ gleichmäßig in $\langle a, b \rangle$, so wird dann und nur dann jede Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ mit in $\langle a, b \rangle$ gleichmäßig beschränkten Teilsummen durch die Folge $\alpha_i(x)$ in eine in $\langle a, b \rangle$ quasi-gleichmäßig konvergente Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(x) u_i(x)$ transformiert, wenn $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i(x) - \alpha_{i+1}(x)|$ in $\langle a, b \rangle$ quasi-gleichmäßig konvergiert *F. Lösch* (Stuttgart).

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Geronimus, Ja. L.: Über asymptotische Formeln für orthogonale Polynome. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 12, 1—14 (1948) [Russisch].

Es handelt sich um das asymptotische Verhalten der (in gewisser Weise normierten) von Szegő [Math. Z. 9, 167—190 (1921)] eingeführten Polynome, die auf dem Einheitskreis ein Orthogonalsystem bilden, insbesondere um die Gültigkeit einer Grenzformel

$$z^n \cdot \bar{P}_n\left(\frac{1}{z}\right) = \sqrt{h_n} (\pi(z) + \varepsilon_n),$$

worin $\pi(z)$ eine im Inneren des Einheitskreises reguläre und nicht verschwindende analytische Funktion bedeutet und $\lim \varepsilon_n = 0$ (für $|z| \leq r < 1$) ist. Bernstein (Über Polynome, die in einem endlichen Intervall orthogonal sind. Charkov 1937 [Russisch]) hat die Gültigkeit dieser Limesgleichung bei Voraussetzungen über die Belegungsfunktion untersucht. Verf. betrachtet dagegen die Koeffizienten a_n der Rekursionsformel $P_{n-1}(z) = z \cdot P_n(z) - a_n z^n P_n(1/z)$ und gibt notwendige und hinreichende Bedingungen für das Bestehen der obigen Grenzformel an. Hinreichend ist z. B., daß $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s=0}^{\infty} |a_{n+s}| \cdot |a_n + a_{n+1}z + \dots + a_{n+s}z^s| = 0$, $|z| = 1$. Er

gibt weiterhin eine Abschätzung von a_n mit Hilfe des Stetigkeitsmoduls der Belegungsfunktion bzw. ihrer Ableitungen. *W. Hahn* (Berlin).

Langer, E. R.: Fourier's series. The genesis and evolution of a theory. Amer. math. Monthly 54, Nr. 7, H. E. Slaughter Mem.-Papers Nr. 1, 86 S. (1947).

In vorliegender Arbeit wird ein kurzer, treffender Überblick gegeben über die Geschichte und den jetzigen Stand der Theorie der Fourierschen Reihen und über die allgemeinere Darstellung willkürlicher Funktionen in unendlichen Reihen. — Im ersten Teil, überwiegend geschichtlichen Charakters, werden in kurzen Zügen die klassischen Probleme aufgezeigt, welche im 18. und 19. Jahrhundert zur Theorie der Fourierschen Reihen führten, vom Problem der schwingenden Saite bei Bernoulli und Euler sowie bei D'Alembert — was zur berühmten Diskussion über den Funktionsbegriff führte — bis zu Fouriers Studien über die Wärmeleitung. Im zweiten Teil wird die Theorie [zum ersten Male von Hobson und Dini entwickelt] der Darstellung einer willkürlichen Funktion in Reihen von Eigenlösungen von Grenzproblemen der Differentialgleichungen zweiter Ordnung behandelt. In Kürze werden die Theorie der Eigenwerte und die entsprechenden Lösungen für solche Gleichungen, der Begriff der verallgemeinerten Fourierschen Reihe mit zahlreichen Beispielen behandelt. — Das allgemeine Problem der Konvergenz solcher Entwicklungen in Reihen durch die Anwendung der Greenschen Funktion ist bis auf die neuesten Studien kurz aufgezeigt. *L. Cesari* (Bologna).

Salem, R. and A. Zygmund: On a theorem of Banach. Proc. nat. Acad. Sci. USA **33**, 293—295 (1947).

È data una semplice dimostrazione del seguente teorema di Banach: „Data una successione di numeri reali $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots$ con $\sum (\alpha_k^2 + \beta_k^2) < \infty$, c'è sempre una serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ che è la serie di Fourier di una funzione continua $f(x)$ e per cui è $a_{nk} = \alpha_k, b_{nk} = \beta_k$ per $k = 1, 2, \dots$, dove la successione di interi $\{n_k\}$ è lacunare. S. Faedo (Roma).

Lee, Ching-Tsün: Note on strong summability of Fourier series. Duke math. J. **14**, 913—919 (1947).

Sia $p \geq 1$ e $f(u) \in L^p$ sia periodica di periodo 2π ; S_p indichi la somma parziale n ma di Fourier della $f(u)$ in un punto fissato x e sia $\Phi(u) = \frac{1}{2} \{f(x+u) + f(x-u) - 2S_p\}$. L'A. dimostra il seguente teorema che estende un suo precedente risultato: „Se è

$$p \geq 1, \quad \int_0^t |\Phi(u)|^p du = o(t) \quad (t \rightarrow +0),$$

allora per ogni intero $k \geq 2$ è $\sum_{n=0}^n S_{n,k} - S^2 = o(n)^{1/2}$. Faedo (Roma).

Karamata, J.: Sur la sommabilité de S. Bernstein et quelques procédés de sommation qui s'y rattachent. Mat. Sbornik, II. s. **21**, 13—24 (1947).

Eine Reihe $\sum u_v$ heißt B, B^*, B_h bzw. B -summierbar mit der Summe s , wenn $\sum_{v=0}^n \cos\left(\frac{\pi v}{2n+1}\right) u_v, \sum_{v=0}^n \cos\left(\frac{\pi 2v+1}{2 2n+1}\right) u_v, \sum_{v=0}^n \cos\left(\frac{\pi v}{2 n+1 h}\right) u_v$ ($0 < h < 1$) bzw. $\sum_{v \leq x} \cos\left(\frac{\pi v}{2 x}\right) u_v$ gegen s strebt für $n \rightarrow \infty$ bzw. $x \rightarrow \infty$. Das Verfahren B wurde zuerst von W. Rogosinski [Math. Ann. **95**, 110—134 (1926), Math. Z. **25**, 132—149 (1926)] behandelt, der die Äquivalenz von B und C_1 bewiesen hat. Für diese Verfahren wird behauptet: 1. B^*, B und C_1 sind äquivalent; 2. B_h ist mit C_1 äquivalent, falls $|h - \frac{1}{2}| \geq c$ ist, mit einem konstanten $c < 0,05$. Aus 1. folgt leicht die interessante Tatsache: 3. $B = B_{\frac{1}{2}}$ ist mit MC_1 äquivalent, wobei M das Verfahren $s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n + s_{n+1}}{2}$ bedeutet. Zum Beweis von 2. wird folgender Satz über allgemeine Verfahren der Art

$$G(x) = \frac{1}{x} \int_0^x g\left(\frac{t}{x}\right) s(t) dt, \quad x \rightarrow +\infty$$

herangezogen: 4. Ist $g'(t)$ stetig, $g(1) = 0$ und $s(t) = s_n$ für $p_n \leq t < p_{n+1}, n = 1, 2, \dots$, ferner $p_n < p'_n < p_{n+1}, p_{n+1} - p_n \rightarrow d, p'_n - p_n \rightarrow h d, 0 \leq h < 1, n \rightarrow \infty, d > 0$, so folgt aus $G(p'_n) \rightarrow s$, daß $G(x) \rightarrow s$ strebt für $x \rightarrow \infty$, falls

$$|h - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2|g(1)|} \min_{\alpha} \int_0^1 |tg'(t) - \alpha g(t)| t dt.$$

Ref. bemerkt, daß 4. wie es da steht, falsch ist, sogar für $g(t) = 1$. Für $h > \frac{1}{2}$ ist jedoch das Beweisverfahren des Verf. anwendbar, so daß 2. mit $\frac{1}{2} - c < h < 1$ gesichert ist. Der Beweis von 1. ist nicht durchgeführt. Wie Ref. erfährt, verfeinert Verf. einen kurzen, direkten Beweis von 3. in Math. Z.

G. G. Lorentz (Tübingen).

Spezielle Orthogonalfunktionen:

Bouwkamp, C. J.: A study of Bessel functions in connection with the problem of two mutually attracting circular discs. Proc. Akad. Wet. Amsterdam **50**, 1071 bis 1083 (1947).

Es wird — in rein mathematischer Behandlung — das Potential der Anziehung zweier in derselben Ebene gelegenen homogenen Kreisscheiben aufeinander unter-

sucht; ausgegangen wird dabei von der in der Theorie der Besselfunktionen auftretenden Funktion $K_0(r t)$ als Anziehungspotential zweier Massenpunkte in der Entfernung r mit einem willkürlichen Parameter t ; bei geeigneter Integration nach t ergibt sich bekanntlich ein Potential von der Art r^{-n} . Weiter werden für spezielle Fälle dieser Kreisscheiben Formeln für das Potential abgeleitet.

H. Hornich (Wien).

Buchholz, H.: Bemerkungen zu einer Entwicklungsformel aus der Theorie der Zylinderfunktionen. Z. angew. Math. Mech. 25/27, 245—252 (1947).

Herleitung von Partialbruchentwicklungen nach den Nullstellen des Nenners für

$$F_v^1(w) = \frac{J_v(xw)}{J_v(w)} \cdot \{H_v^{(1)}(Xw) J_v(w) - H_v^{(1)}(w) J_v(Xw)\},$$

$$F_v^2(w) = \frac{J_v(xw)}{J_v'(w)} \cdot \{H_v^{(1)}(Xw) J_v'(w) - H_v^{(1)'}(w) J_v(Xw)\}$$

und $G_v^i(w) = J_v'(xw) \cdot F_v^i(w) J_v(xw)$ ($i = 1, 2$). w, v sind beliebig komplex, $r \neq -1, -2, \dots$; $0 \leq x \leq X \leq 1$. Die Funktionen J_v bzw. $H_v^{(1)}$ sind Besselsche bzw. Hankelsche Funktionen.

J. Meixner (Aachen).

Herpin, A.: Sur une nouvelle méthode d'introduction des polynomes de Lucas. C. r. Acad. Sci., Paris 225, 17—19 (1947).

In den Potenzen von $A + B\sigma_1 + C\sigma_2 + D\sigma_3$, wo $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ Paulische antikommutative Matrizen und A, B, C, D Zahlen sind, treten a's Koeffizienten Polynome in A und $\Delta = A^2 - B^2 - C^2 - D^2$ auf, welche einer einfachen dreigliedrigen Rekursionsformel genügen. Sie werden diskutiert. J. Meixner (Aachen).

Humbert, A.: Images des fonctions de Mathieu. C. r. Acad. Sci., Paris 225, 715—716 (1947).

Aus den bei McLachlan (dies. Zbl. 29, 29) angegebenen Integralbeziehungen zwischen zwei Mathieuschen Funktionen mit gleichen Parametern werden Laplace-Transformationen hergeleitet, die als Original- und als Bildfunktion Mathieusche Funktionen enthalten.

J. Meixner (Aachen).

Kourganoff, V.: Sur les intégrales $\int_0^\infty e^{-px} x^s K_n(x) dx$. C. r. Acad. Sci., Paris 225, 430—431 (1947).

In der Lehre vom Strahlungsgleichgewicht der Sternatmosphären spielen die Funktionen eine Rolle, die man bei ganzen $n \geq 0$ für alle reellen x durch

$$K_n(x) = x^{n-1} \int_x^\infty t^{-n} e^{-t} dt \quad \left(\text{für } x > 0 \text{ auch } K_n(x) = \int_1^\infty t^{-n} e^{-xt} dt \right)$$

erklärt. Untersuchungen auf dem genannten Gebiete der Astrophysik haben den

Verf. zu den Integralen $J_{psn}(a) = \int_0^\infty e^{-px} x^s K_n(ax) dx$ geführt. Sie lassen sich für $a > 0, p > -a$, nichtnegative ganze s und positive ganze n mit Hilfe der hypergeometrischen Funktion ausdrücken. Zur Zahlenrechnung geeigneter ist die vom Verf. hergeleitete Formel

$$J_{psn}(a) = (-1)^{n-1} a^{n-1} (n, s) p^{-n-s} [\log(1+q) + \sigma_{n+s-1}(q)] \\ + \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^k (n, k) (1, s-k-1) a^{-k-1} (a+p)^{k-s}, \quad \sigma_m(q) = \sum_{k=1}^m \frac{(-q)^k}{k}, \quad q = \frac{p}{a},$$

$(\lambda, m) = \Gamma(\lambda+m)/\Gamma(\lambda)$. — Ist $a < 0$, so findet man nach dem Verfahren der Doppelintegrale

$$J_{psn}(a) = -s! a^{-s-1} \int_{-\infty}^1 t^{-n} (t+q)^{-s-1} dt,$$

ein Integral, das für $n \geq 2$ divergiert. Verf. gibt den Ausdruck an, den man für $n = 1$ erhält, wenn man den rationalen Integranden in Teilbrüche entwickelt.

Koschmieder (Graz).

Kourganoff, V.: Sur les intégrales $I_{psnm}(a, b) = \int_0^\infty e^{-px} x^s K_n(ax) K_m(bx) dx$.

C. r. Acad. Sci., Paris **225**, 451—453 (1947).

Die $K_l(x)$ im Integranden sind in der vorstehenden Besprechung (B) einer früheren Arbeit (I) des Verf. erklärt. Zu den Werten der $I_{psnm}(a, b)$ mit natürlichen n, m und $a > 0, b > 0$ steigt Verf. in folgenden Schritten auf: 1. Er berechnet die Integrale $I_{00nm}(a, b)$. Hilfsmittel: Logarithmen und die in BI erläuterten Summen σ . 2. Er drückt die Integrale $I_{p011}(a, b)$ mit Hilfe des Legendre-Abelschen Dilogarithmus aus, der sich für $|x| \leq 1$ durch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$ darstellen läßt. 3. Er führt $I_{p0n1}(a, b)$ auf $I_{p011}(a, b)$, Ausdrücke der Art σ und Logarithmen zurück. 4. Er stellt eine Rücklaufsformel für die $I_{p0nm}(a, b)$ auf, die deren dritten und vierten Zeiger um 1 erniedrigt. Aus ihr gewinnt er die Zahlenwerte $I_{1012}(1, 1), \dots, I_{1044}(1, 1)$. 5. Er führt durch Rücklauf $I_{psnm}(a, b)$ auf das nach 4. ermittelbare Integral $I_{p,0,n+s,m}(a, b)$ und die in I gefundenen $I(b)$ mit drei Zeigern zurück. — Er schließt mit einer Bemerkung über den Fall, daß a, b nicht beide positiv sind. Koschmieder.

Modulfunktionen:

Roure, H.: Généralisation des fonctions zétafuchsiennes. C. r. Acad. Sci., Paris **224**, 1687—1689 (1947).

Ist G eine diskontinuierliche Fuchs'sche Gruppe, die aus den linearen Transformationen $T_i(z) = \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}$, $i = 1, 2, 3, \dots$ besteht, so nennt man n Funktionen $Z_1(z), Z_2(z), \dots, Z_n(z)$, die im Hauptkreis von G höchstens Pole haben, nach H. Poincaré Zetafuchs'sche Funktionen, wenn sie bei einer Transformation $T_i(z)$ in n Funktionen $Z_\mu^{(i)}(z)$, $\mu = 1, 2, \dots, n$, übergehen, die sich durch die $Z_\nu(z)$ linear ausdrücken lassen,

$$Z_\mu(T_i(z)) = Z_\mu^{(i)}(z) = \sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu}^{(i)} Z_\nu(z), \quad \mu = 1, 2, \dots, n,$$

wobei die Determinanten $|a_{\mu\nu}^{(i)}| = 1$ sind. Die Gruppe G_1 dieser Substitutionen Σ_i ist isomorph zur Gruppe G der Transformationen T_i . In der Note wird der Begriff der Zetafuchs'schen Funktionen auf Funktionen von vier Variablen x, y, z, t übertragen, bei denen die Transformationen T_i der diskontinuierlichen Gruppe G die spezielle Form haben ($i = 1, 2, 3, \dots$)

$$\begin{aligned} X_i &= \frac{A_i x + A'_i y + A''_i}{C_i x + C'_i y + C''_i}, & Y_i &= \frac{B_i x + B'_i y + B''_i}{C_i x + C'_i y + C''_i}, \\ Z_i &= \frac{D_i z + D'_i t + D''_i}{F_i z + F'_i t + F''_i}, & T_i &= \frac{E_i z + E'_i t + E''_i}{F_i z + F'_i t + F''_i}. \end{aligned}$$

Die Existenz zugehöriger Zetafuchs'scher Funktionen $Z_\nu(x, y, z, t)$ wird mittels verallgemeinerter Poincaréscher Reihen, die in der Note angegeben werden, nachgewiesen. Ferner wird mitgeteilt, daß die Funktionen Z_ν einem speziellen System von n linearen partiellen Differentialgleichungen n -ter Ordnung genügen, deren Koeffizienten sich rational durch die zur Gruppe G gehörenden automorphen Funktionen ausdrücken lassen.

F. Sommer (Münster).

Gewöhnliche Differentialgleichungen:

Berwald, L.: Über Haars Verallgemeinerung des Lemmas von Du Bois-Reymond und verwandte Sätze. Acta math., Uppsala **79**, 39—49 (1947).

Die Arbeit knüpft an einen den Du Bois-Reymondschen Hilfssatz verallgemeinernden Satz von Haar [Acta Litt. Sci. Univ. Szeged, Sect. Sci. math. **1**, 33—38

(1922)] an: Es sei

$$L(u) = \sum_m^{0,n} p_m(x) u^{(n-m)}(x), \quad p_0(x) \equiv 1,$$

ein linearer Differentialausdruck n -ter Ordnung mit den in $[a, a']$ etwa beliebig oft ableitbaren Beiwerten $p_m(x)$. Die dort stetige Funktion $f(x)$ bringe das Integral

$\int_a^{a'} f(t) L(\eta(t)) dt$ zum Verschwinden, wenn $\eta(x)$ eine in $[a, a']$ n -mal stetig ableitbare Funktion mit den Eigenschaften $\eta^{(l-1)}(\alpha) = \eta^{(l-1)}(\alpha') = 0$ ($l = 1, \dots, n$) bedeutet. Dann ist $f(x)$ selbst n -mal ableitbar und genügt der zu $L(u) = 0$ adjungierten Differentialgleichung $\Delta(v) \equiv (-1)^n \sum_m^{0,n} (-1)^m (p_m v)^{(n-m)} = 0$. — Verf. erweist diesen Satz als Sonderfall eines Satzes über Gefüge linearer Differentialausdrücke

$$L_i(u) \equiv a_{ij}(x) u_j'(x) + b_{ij}(x) u_j(x) \quad (i = 1, \dots, n)$$

[zu lesen mit der Vorschrift der Summierung über zweimal auftretende Zeiger (wie j) von 1 bis n]; hierin sind in $[a, a']$ die b_{ik} stetige, die a_{ik} solche einmal stetig ableitbare Funktionen, daß $\det. a_{ik} \neq 0$. Der auf die $L_i(u)$ bezügliche neue, vom Verf. hier aufgestellte Satz lautet: Sind die Funktionen $f_i(x)$ in $[a, a']$ stetig und bringen

sie die Integrale $\int_a^{a'} f_i(t) L_j(\eta(t)) dt$ zum Verschwinden, wobei $\eta_i(x)$ irgend n in $[a, a']$ stetig ableitbare, am Rande verschwindende Funktionen bedeuten, so sind die $f_i(x)$ selbst ableitbar und befriedigen das zu $L_i(u) = 0$ adjungierte Gefüge

$$\Delta_j(v) \equiv -\frac{d}{dx} [a_{ij}(x) v_i(x)] + b_{ij}(x) v_i(x) = 0 \quad (j = 1, \dots, n).$$

Daran fügt Verf. die Verallgemeinerung eines Ergebnisses von Razmadzé [Math. Ann., Berlin 84, 115—116 (1921)]; er gewinnt sie durch ein Verfahren, das der Zurückführung des Verschwindens der ersten Variation auf den Hilfssatz von DuBois-Reymond entspricht. Schließlich verallgemeinert Verf. einen Satz von Kryloff [Bull. Acad. Sci. Oucraine 1, 8—11 (1923)] zu folgender Aussage: Man führe zu den schon erklärten Zeichen noch die Wiederholungen $L^h(u) = L(L^{h-1}(u))$ [mit $L^0(u) = u$], $\Delta^h(v) = \Delta(\Delta^{h-1}(v))$ [mit $\Delta^0(v) = v$] ($h = 1, \dots, k$) und die Ausdrücke $\mathfrak{L}^0(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}_k$, $\mathfrak{L}^1(\mathfrak{M}) = \Delta(\mathfrak{M}_k) + \mathfrak{M}_{k-1}, \dots$, $\mathfrak{L}^h(\mathfrak{M}) = \Delta(\mathfrak{L}^{h-1}(\mathfrak{M})) + \mathfrak{M}_{k-h}$ ein; $\mathfrak{M}_0(x), \dots, \mathfrak{M}_k(x)$ sollen dabei $k+1$ in $[a, a']$ stetige Funktionen von der Art be-

deuten, daß $\mathfrak{L}^0(\mathfrak{M}), \mathfrak{L}^1(\mathfrak{M}), \dots, \mathfrak{L}^{k-2}(\mathfrak{M})$ n -mal ableitbar sind und $\int_a^{a'} \sum_{\sigma}^{0,k} \mathfrak{M}_{\sigma}(t) L^{\sigma}(\eta^{(t)}) dt$ verschwindet, wenn $\eta(x)$ eine beliebige in $[a, a']$ kn -mal stetig ableitbare Funktion vorstellt, die mit ihren ersten $kn-1$ Ableitungen am Rande verschwindet. Dann ist auch $\mathfrak{L}^{(k-1)}(\mathfrak{M})$ n -mal ableitbar und $\mathfrak{L}^{(k)}(\mathfrak{M}) = 0$. — Ist im besonderen $\mathfrak{M}_q(x)$ in $[a, a']$ qn -mal stetig ableitbar ($q = 0, 1, \dots, k-1$), so ist $\mathfrak{M}_k(x)$ kn -mal ableitbar und genügt der Differentialgleichung $\sum_{\sigma}^{0,k} \Delta^{k-\sigma}(\mathfrak{M}_k)_{\sigma} = 0$. L. Koschmieder (Graz).

Bogdanov, I. S.: Über die normalen Systeme Liapunovs. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 57, 215—217 (1947) [Russisch].

Als charakteristische Zahl (ch. Z.) der Funktion $f(t)$ bezeichnet man die untere Grenze der Zahlen λ , für welche $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda t} f(t) = +\infty$. Ch. Z. einer Gesamtheit von Funktionen nennt man die kleinste der ch. Z. der Funktionen, welche zu dieser Gesamtheit gehören. Betrachten wir das lineare Differentialgleichungssystem

$$(1) \quad dX/dt = X P,$$

wo P eine stetige und beschränkte Matrix im Intervall $(t_0, +\infty)$ ist. Dann sind die ch. Z. der Lösung endlich. Als Normalsystem von Lösungen des Systems (1) bezeichnet man ein Fundamentalsystem von Lösungen von der Eigenschaft, daß jede

lineare Kombination von diesen eine ch. Z. besitzt, die mit der ch. Z. der Gesamtheit der kombinierten Lösungen übereinstimmt. — Im Zusammenhang mit einem Liapounoffschen Satz [Allgemeines Problem über die Stabilität der Bewegung, 1945] gibt Verf. eine geometrische Charakterisierung der Normalsysteme von Lösungen des Systems (1). L. Cesari (Bologna).

Magenes, E.: Sopra un problema di T. Satô per l'equazione differenziale $y'' = f(x, y, y')$. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 2, 130—136 (1947).

L'A. indica preliminarmente una nuova dimostrazione di un teorema di G. Scorza Dragoni (questo Zbl. 20, 223) relativo alle soluzioni dell'equazione

$$y' = y'(x_0) + \int_{x_0}^x f(x, y, y') dx,$$

e successivamente, estendendo un teorema di T. Satô (questo Zbl. 19, 166) dimostra che se $f(x, y, y')$ è continua nel campo $C: x_0 \leq x \leq x_1, \sigma(x) \leq y \leq \tau(x), |y'| < +\infty$, dove $\sigma(x)$ e $\tau(x)$ sono due integrali dell'equazione

$$(1) \quad y''(x) = f(x, y, y'),$$

tali che $\sigma(x_0) = \tau(x_0)$, $\sigma(x) < \tau(x)$ per $x_0 < x < x_1$, se $f(x, y, y') \leq M(x)$ in C , ed $M(x)$ è integrabile in (x_0, x_1) , se per $y_1 \leq y_2, y'_1 \leq y'_2$, è $f(x, y_1, y'_1) < f(x, y_2, y'_2)$, e se $\varphi(x)$ è tale che

$$\begin{aligned} \varphi(x) < \sigma(x) & \quad \text{per } x_0 \leq x < \bar{x}, & \varphi(\bar{x}) &= \sigma(\bar{x}), \\ \sigma(x) < \varphi(x) < \tau(x) & \quad \text{per } \bar{x} < x < x_1, & \varphi(x_1) &= \tau(x_1), \\ \varphi''(x) & < f(x, \varphi(x), \varphi'(x)), \end{aligned}$$

esiste allora almeno un integrale $Y(x)$ dell'equazione (1) uscente dal punto (x_0, y_0) tangente almeno in un punto alla curva $y = \varphi(x)$, e tale che

$$\sigma(x) \leq Y(x) \leq \tau(x). \quad \text{Sansone (Firenze).}$$

Magenes, K.: Sopra un problema di T. Satô per l'equazione differenziale $y'' = f(x, y, y')$. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 2, 258—261 (1947).

L'A. estende il teorema della nota precedente (vedi la precedente recensione) imponendo alla $f(x, y, y')$ condizioni meno restrittive, e con procedimento di approssimazione dà una nuova dimostrazione dello stesso teorema partendo dal caso di T. Satô.

Giovanni Sansone (Firenze).

Manacorda, T.: Sul comportamento asintotico degli integrali dell'equazione: $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ quando $\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = +\infty$. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 2, 537—541 (1947).

L'A. riallacciandosi ad alcune ricerche di G. Armellini (questo Zbl. 11, 209), G. Sansone (questo Zbl. 16, 112), L. Tonelli (questo Zbl. 16, 112), studia il comportamento asintotico degli integrali dell'equazione

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

per $p(x), q(x)$ continue, $0 \leq p(x) \leq 2l, q(x) > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = +\infty$, e nell'ipotesi che $q(x)$ sia non decrescente dimostra che se $\{x_{2n}\}$ è la successione dei punti estremanti di un integrale $y(x)$ e $\{x_{2n-1}\}$ quella dei punti di zero, esiste un n_1 tale che per $n > n_1$ valgono le limitazioni:

$$\frac{\pi - 2b_n}{2\sqrt{q(x_{2n}) - l^2}} < x_{2n} - x_{2n-1} < \frac{\pi}{2\sqrt{q(x_{2n-1})}}, \quad \frac{\pi}{2\sqrt{q(x_{2n+1})}} < x_{2n+1} - x_{2n} < \frac{\pi + 2b_n}{2\sqrt{q(x_{2n}) - l^2}},$$

$$b_n = \arctg \frac{l}{\sqrt{q(x_{2n}) - l^2}}, \quad 0 \leq b_n < \frac{\pi}{2}.$$

Giovanni Sansone (Firenze).

Manacorda, T.: Sul comportamento asintotico degli integrali dell'equazione $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ quando $\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = +\infty$. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 2, 752—757 (1947).

L'A. in continuazione di una nota precedente (vedi la precedente recensione) dimostra che per $p(x)$, $q(x)$, $q'(x)$ continue, $q(x)$ non decrescente, $0 \leq p(x) \leq 2l$, $q(x) \geq 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = +\infty$, $q'(x) \geq 0$, e se $\log q(x)$ tende all'infinito regolarmente (questo Zbl. 11, 209), allora per tutti gli integrali $y(x)$ vale la relazione $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$.

Giovanni Sansone (Firenze).

McHarg, Elizabeth A.: A differential equation. J. London math. Soc. 22, 83 bis 85 (1947).

L'A. si occupa delle soluzioni periodiche dell'equazione

$$(1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + g(x) = 0,$$

con $f(x)$ e $g(x)$ continue e derivabili, $f'(x)$ riuscendo inoltre limitata. Secondo l'A., se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni dispari e positive per x positivo, se $f(x) < k \cdot g(x)$, ($0 < x < \xi$), (k e ξ essendo due convenienti costanti positive), posto

$$G(x) = \int_0^x g(t) dt \text{ e detto } v_0 \text{ un numero positivo, che non superi nè } k^{-1} \text{ nè } \sqrt{2G(\xi)},$$

esistono soluzioni periodiche della (1) soddisfacenti alle condizioni iniziali $x = 0$, $\dot{x} = v_0$.

G. Scorza Dragoni (Padova).

Kasner, Edward and John de Ciceo: Transformation theory of physical curves. Proc. nat. Acad. Sci. USA 33, 338—342 (1947).

In Erweiterung von E. Kasners Untersuchungen in „Differential-geometric aspects of dynamics“ (Amer. math. Soc. Publ. 1934) betrachten Verf. das Verhalten der Integralkurven C_n der Diff. Gleich. 3. Ordnung

$$(\Psi - y' \Phi) y''' = [\Psi_x + (\Psi_y - \Phi_x) y' - \Phi_y y'^2] y'' - \left[3\Phi + \frac{(n-2)(\Phi + y' \Psi)}{1 + y'^2} \right] y''^2.$$

Für $n = 2$ sind die C_2 Bahnkurven eines ebenen stationären Kraftfeldes. C_{-2} sind Brachistochronen, C_1 Kettenlinien, C_0 Geschwindigkeitskurven. Es wird bewiesen: Mit Ausnahme des Systems C_2 , das nach Kasner projektive Transformationen gestattet, sind die Ähnlichkeitstransformationen die einzigen Punkt- oder Berührungstransformationen, die ein System C_n in sich überführen.

Haack.

Partielle Differentialgleichungen:

Maruhn, K.: Über einige Klassen nichtlinearer Randwertaufgaben der Potentialtheorie. Math. Z. 51, 36—60 (1947).

Der Potentialtheorie werden neuerdings z. T. durch die Physik Probleme gestellt, in welchen auch nichtlineare Beziehungen zwischen den Randwerten der harmonischen Funktion gefordert sind. Eines der ersten dieser Probleme wurde von Carleman im großen gelöst. Verf. behandelt — allerdings nur im kleinen (in der Nachbarschaft einer als bekannt anzusehenden Lösung, etwa eines klassischen Problems) — nichtlineare Verallgemeinerungen der drei Randwertprobleme der Potentialtheorie, bei denen auch der Verzweigungsfall auftreten kann. Der Ansatz der gesuchten harmonischen Funktion ist der übliche als Potential auf der Berandung ausgebreiteter Belegungen; für diese Potentiale müssen die scharfen Ergebnisse von Lichtenstein [Ber. Sächs. Akad. Wiss., Leipzig 82, 265—344 (1930)] und Schauder [Math. Z. 33, 602—640 (1931)] herangezogen werden, um die sich ergebenden nichtlinearen Integralgleichungen mittels der Methode von E. Schmidt [Math. Ann. 65, 370—399 (1908)] oder, was sich meist als notwendig erweist, mittels der Methode der sukzessiven Approximationen von Lichtenstein (Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen... Berlin 1931) aufzulösen.

Erwünscht wäre die vollständige Lösung im großen eines nichtlinearen Randwertproblems harmonischer Funktionen, bei dem der Verzweigungsfall vorliegt; für ein solches Problem vgl. E. Hölder [Math. Z. **35**, 632—643 (1932)], zusammengekommen mit einem auf anderem Wege von Nikliborc [Math. Z. **35**, 625—631 (1932)] bewiesenen Eindeutigkeitssatz. *E. Hölder* (Leipzig).

Gusejnov, A. I.: Über eine Aufgabe der Potentialtheorie. Priklad. Mat. Mech., Moskva **12**, 103—108 (1948) [Russisch].

Die Frage nach der Bestimmung der stationären Temperaturverteilung in einem Körper, dessen Wärmeleitungsfähigkeit in den einzelnen Teilen verschiedene konstante Werte aufweist, führt Verf. zu folgender Randwertaufgabe: Gegeben ist im 3-dimensionalen Raum ein Gebiet mit der Oberfläche S und in seinem Inneren ein weiteres Gebiet (oder mehrere getrennt voneinander gelegene Gebiete) mit der Oberfläche σ . Zu bestimmen ist eine überall stetige harmonische Funktion u im Gesamtgebiet, die der Randbedingung genügt:

$$u = f(s) \text{ auf } S; \quad K_1 \frac{\partial u}{\partial n_1} = K_2 \frac{\partial u}{\partial n_2} \text{ auf } \sigma,$$

wo K_1 und K_2 positive Konstanten, n_1 die innere und n_2 die äußere Normale von σ bedeuten. — Der Ansatz für u als Summe zweier Potentiale einer einfachen Belegung auf σ und einer Doppelbelegung auf S führt für die beiden Belegungsfunktionen auf ein System von zwei Integralgleichungen vom Fredholmischen Typus, das Verf. als Spezialfall mit dem Parameterwert $\lambda = -1$ eines allgemeineren Systems mit beliebigem λ ansieht. Für dieses System bestimmt er die entsprechenden allgemeineren Randbedingungen und zeigt, daß im Inneren des Einheitskreises λ keine komplexen Eigenwerte besitzt, $\lambda = 1$ kein Eigenwert, jedoch $\lambda = -1$ ein Eigenwert ist. — Entsprechende Resultate ergeben sich für den Fall, daß die Randbedingung $u = f(s)$ auf S durch die andere $\frac{\partial u}{\partial n} = f(s)$ auf S ersetzt wird. *Srenson* (Erlangen).

Walsh, J. L.: Note on the critical points of harmonic functions. Proc. nat. Acad. Sci. USA **33**, 54—59 (1947).

Wie Verf. früher gezeigt hat [Bull. Amer. math. Soc. **52**, 346—347 (1946)], gilt über die Lage der kritischen Punkte (d. h. der Nullstellen des Gradienten) für das harmonische Maß folgender Satz: Das harmonische Maß der m getrennten Jordankurven C_1, C_2, \dots, C_m in bezug auf ein Gebiet, das von diesen Kurven und einem sie alle umschließenden Kreise C begrenzt wird, d. h. diejenige Potentialfunktion, die längs aller C_i den Wert 1, längs C den Wert 0 annimmt, hat kritische Punkte nur in dem kleinsten nichteuklidischen konvexen Teilgebiet des Kreisinneren, das alle C_i enthält. Dieser Satz kann natürlich sofort für allgemeine einfach zusammenhängende Bereiche mit linienförmiger Berandung ausgesprochen werden, für die sich eine Metrisierung und damit der Begriff der Konvexität durch konforme Abbildung auf das Innere eines Kreises C ergibt. Man kann ihn schließlich auf mehrfach zusammenhängende Bereiche ausdehnen, indem man die Fundamentalabbildung eines solchen Bereiches zu Hilfe nimmt: betrachtet wird dann ein von n Jordankurven begrenzter Bereich R und das harmonische Maß einer Menge von m weiteren Jordankurven, die innerhalb R verlaufen und getrennt liegen. Schließlich betrachtet Verf. auch das harmonische Maß von Gesamtheiten von Jordanbögen, die auf dem Rand des Betrachtungsbereiches liegen. Analoge Sätze wie für das harmonische Maß gelten im übrigen für die Greensche Funktion. *Brödel* (Jena).

Thomas, T. Y.: Characteristic coordinates for hyperbolic differential equations in the large. Proc. nat. Acad. Sci. USA **33**, 242—246 (1947).

Es sei D ein offenes, einfach zusammenhängendes Gebiet, bezogen auf die rechtwinkligen Koordinaten x^1, x^2 . $g_{ik} x^i x^k = 0$ sei die Differentialgleichung der Charakteristiken einer hyperbolischen partiellen Differentialgleichung, so daß die g_{ik} in D stetig sind und stetige erste Ableitungen besitzen. Verf. beweist: Besitzt jede der

beiden Scharen von Charakteristiken eine Transversale in D , die eine stetige Parameterdarstellung gestattet, so gibt es zwei Funktionen $\Phi(x^i)$, $\Psi(x^i)$ mit stetigen ersten Ableitungen, die D in ein zweidimensionales Gebiet der Koordinatenebene Φ , Ψ eindeutig abbilden.

Huack (Bad Gandersheim).

Dacev, Asen: Über die Abkühlung eines aus einer endlichen Anzahl von homogenen Teilen bestehenden Stabes. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 56, 355—358 (1947) [Russisch].

Der Stab $x_0 \leq x \leq x_n$ sei aus n homogenen Teilen $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ zusammengesetzt. Für jedes Teilstück gilt die Differentialgleichung $a_i^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = \frac{\partial u_i}{\partial t}$. Gegeben seien die Anfangsbedingungen $u_i(x; 0) = \Phi_i(x)$, $x_{i-1} \leq x \leq x_i$, und die Randbedingungen $u_1(x_0, t) = \varphi_0(t)$, $u_n(x_n, t) = \varphi_n(t)$. In den Teilpunkten wird $u_i = u_{i+1}$ und $k_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = k_{i+1} \frac{\partial u_{i+1}}{\partial x}$ für $t > 0$ gefordert. — Sind die Temperaturen $\varphi_i(t)$ in den Teilpunkten bekannt, so kann man die Lösung $u_i(x, t)$ für jedes Teilstück entnehmen aus Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplacetransformation, Berlin 1937, S. 358, Formel (10). Für die unbekannten Funktionen $\varphi_i(t)$ erhält man aus

$$k_i \int_0^t \frac{\partial u_i}{\partial x} d\tau = k_{i-1} \int_0^t \frac{\partial u_{i-1}}{\partial x} d\tau$$

ein System von Volterraschen Integralgleichungen 1. Art, das sich in ein ebensolches 2. Art überführen läßt, womit die $\varphi_i(t)$ bestimmt sind. Im Falle konstanter Temperaturen an den Stabendpunkten sind auch die φ_i konstant und das Volterrasche System 1. Art geht in ein inhomogenes lineares Gleichungssystem für φ_i über.

Heinhold (München).

Malmheden, Harry: A class of hyperbolic systems of linear differential equations. Lunds Univ. mat. Sem. 8, 116 S. (1947).

M. Riesz hat früher [vgl. z. B. L'Intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy pour l'équation des ondes, Soc. math. France, Conférence Réun. internat. Math., Paris 1937 (1938); ferner Acta math., Uppsala (im Druck)] eine Integrationsmethode für das Anfangswertproblem bei hyperbolischen Differentialgleichungen entwickelt, in der die Grundleistung durch einen von einem Parameter abhängigen Kern ersetzt wird, dessen analytische Fortsetzung als Funktion dieses Parameters bei der Lösung des Problems dann eine Rolle spielt; der Kern ist unabhängig von der Dimensionszahl wohlbestimmt, und der Unterschied zwischen ungerader und gerader Dimension macht sich erst bei der Durchführung der analytischen Fortsetzung bemerkbar. In der vorliegenden Schrift wird diese Methode für gewisse Systeme linearer partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung vom hyperbolischen Typus mit variablen Koeffizienten entwickelt. Die Besonderheit dieser Systeme besteht darin, daß sie einen „linearen Multiplikator“ besitzen, wobei als „Multiplikator“ jeder Operator bezeichnet wird, vermöge dessen die Ableitungen höchster Ordnung voneinander getrennt werden. Dementsprechend wird im ersten Teil der vorliegenden Schrift die Gewinnung notwendiger und hinreichender Bedingungen für die Existenz solcher linearer Multiplikatoren behandelt. Sodann wird der Rieszsche Kern des Systems bestimmt, der Kern in die Greensche Formel eingeführt und die Diskussion der sich hierbei ergebenden Potentiale angeschlossen. — Aus dem Inhaltsverzeichnis: I. Kap. Charakteristiken; II.—IV. Kap. Existenz von Multiplikatoren, Zusammenhang mit der Elementarteilertheorie, Konstruktion von Systemen mit einem linearen Multiplikator; V. Kap. Übergang zu einem System 2. Ordn., normalisierte Multiplikatoren, Vorbereitendes über singuläre Lösungen; VI. Kap. Geometrie der Systeme; VII. Kap. Konstruktion des Kerns, Konvergenzbeweis; VIII. Kap. Cauchysches Problem für das System 2. und 1. Ordn. Rieszsche Potentiale; IX. Kap. Cauchysches Problem für ein System 2. Ordn., in dem die

unbekannten Funktionen Komponenten eines kontravarianten Vektors sind; Anhang. 1. Übergang von der expliziten zur impliziten Darstellung charakteristischer Unterräume, physikalische Interpretation; 2. Direkt geometrische Herleitung der Gleichungen der charakteristischen Kurven im Falle impliziter Darstellung. *Haupt*.

Gårding, L.: The solution of Cauchy's problem for two totally hyperbolic linear differential equations by means of Riesz integrals. *Ann. Math.*, Princeton, II. s. 48, 785—826 (1947).

M. Riesz [„L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy pour l'équation des ondes — Soc. Math. France, Conférences Réun. internat. Math., Paris 1937 (1938)] has indicated a method for the integration of the wave equation, founded upon a generalization of the Riemann-Liouville integral:

$$(1) \quad I^p f(x) = \frac{1}{\Gamma^{(p)}(p)} \int_0^x f(y) (x-y)^{p-1} dy.$$

Precisely, M. Riesz defines a space (of Lorentz) of points $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ where the distance is

$$r(x-y) = (x_1-y_1)^2 - \dots - (x_n-y_n)^2,$$

and the cone of light is characterised by the condition $r(x) > 0$. Let G be a hyper-surface which be intersected in one and only one point by every straight line along which the square distance results non-negative. Let $E(x)$ be that part of the cone of light which is comprised between the point x and G ; M. Riesz considers the integral

$$(2) \quad I^p f(x) = \frac{1}{H_n^{(p)}(p)} \int_{E(x)} f(y) r(x-y)^{p-\frac{1}{2}n} dy \quad [H_n^{(p)}(p) = 2^{2p-1} \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(p) \Gamma(p-\frac{1}{2}(n-2))] .$$

If Δ denotes the operator of the wave equation, it is now $\Delta I^{(p-1)} f(x) = I^{(p)} f(x)$. Hence Riesz deduces the resolution formula for Cauchy's problem. The Author extends Riesz's procedure considering a space the points of which are real, symmetrical matrices $x = (x_{ik})$ of order $n \geq 2$. A formula which is the analogue of (2) is still utilized. After the position $r(x-y) = \det(x-y)$ the Author considers the integral

$$I^{(p)} f(x) = \frac{1}{\Gamma_n^{(p)}(p)} \int_{E(x)} f(y) r(x-y)^{p-\frac{1}{2}(n+1)} dy,$$

$$\left(dy = \prod_{i,k} dy_{ik}, \quad \Gamma_n^{(p)}(p) = \prod_{k=1}^n \left(\Gamma(p - \frac{1}{2}(k-1)) \Gamma(\frac{1}{2})^{n-k+1} \right) \right).$$

It ensues then: $DI^{p+1} f(x) = I^p f(x)$, where $D = \det \xi$, $\xi = (\xi^{ik})$ and $\xi^{ii} = \frac{\partial}{\partial x_{ii}}$, $\xi^{ij} = \xi^{ji} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}$. Therefore the operator D may be regarded as the resolvent of the equation set $\xi^{ki} u_i(x) = 0$ ($k = 1, \dots, n$), or, shortly, $\xi u = 0$. From this result the Author deduces the resolution formula of the Cauchy's problem for the equation $\xi^m u = h$. A generalization is obtained considering a space the points of which are hermitian matrices: $x = (x'_{ij} + i x''_{ij})$. Thus — among other results — is brought to solution Cauchy's problem for the set of Dirac's equations. *Luigi Amerio*.

Variationsrechnung:

Nöbeling, G.: Reguläre Variationsprobleme. *Ber. Math.-Tagung Tübingen 1946*, 110—111 (1947).

Danköhler, W. und E. Hopf: Über einige Eigenschaften von Kurvenintegralen und über die Äquivalenz von indefiniten mit definiten Variationsproblemen. *Math. Ann.*, Berlin 120, 12—20 (1947).

Die Arbeit ist der Frage gewidmet, wann es zu einem gegebenen Variationsproblem (in Parameterdarstellung im n -dimensionalen Raum) ein äquivalentes posi-

tiv definites oder semidefinites gibt, d. h. eine im Kleinen Lipschitz-beschränkte Funktion $f(x)$, so daß für alle Kurven

$$\int_{x_1}^{x_2} F dt + f(x_1) - f(x_2) \geq 0 \quad (1) \quad \text{oder} \quad \geq m \int_{x_1}^{x_2} |\dot{x}| dt \quad (2)$$

ist. Ersteres gibt es — zeigt sich — immer dann, wenn es zwei feste Punkte gibt, so daß die untere Grenze der Integralwerte für alle sie verbindenden Kurven $> -\infty$ ist. Gleichzeitig ist dann $\oint F dt \geq 0$ für alle geschlossenen Kurven, und hieraus folgt umgekehrt, daß die genannte untere Grenze für alle Punktpaare $> -\infty$ ist. Ist sogar $\oint F dt \geq m \int |\dot{x}| dt$ mit $m > 0$, so kann man (2) erreichen. — Die Aussage wird auf Lagrangesche Probleme, also auf den Fall verallgemeinert, wo nicht mehr alle Richtungselemente „zulässig“ sind. Es wird ein „Zulässigkeitsmaß“ z , $0 \leq z \leq 1$, für Kurven definiert, es werden also nicht nur schlechthin zulässige Kurven ($z = 1$) betrachtet. Hier ist dies Resultat besonders merkwürdig: Wenn die „Rückkehrchance“, d. h. die obere Grenze der z für geschlossene Wege, < 1 ist, kann man immer für alle erlaubten Wege (2) erreichen — ohne jede weitere Voraussetzung. Boerner (München).

Belgodere, P.: *Interprétation, par l'indicatrice des aires, de la condition d'Euler pour l'extremum, dans un problème variationnel.* C. r. Acad. Sci., Paris **224**, 1203 bis 1205 (1947).

Verallgemeinerung der Resultate einer früheren Note des Verf. [C. r. Acad. Sci., Paris **219**, 272—273 (1944)], die das Flächenintegral mit Integrand $g(p, q)$ behandelte, auf das allgemeine Integral $I = \int g(x, y, z, p, q) dx dy$. In jedem Punkt $M(x, y, z)$ wird eine Flächenindikatrix $N(x + X, y + Y, z + Z)$ durch die Parameterdarstellung $X = g'_p, Y = g'_q, Z = p g'_p + q g'_q - g$ erklärt. Dann wird jedem Flächenelement in bestimmter Weise ein Punkt der zugehörigen Flächenindikatrix und damit ein Vektor \overrightarrow{MN} zugeordnet. Es stellt sich heraus, daß der Wert des Integrals I über eine Fläche gleich dem zugehörigen Vektorfluß ist. Bei konvexer Flächenindikatrix ist I das Maximum des Vektorflusses, wenn zur Konkurrenz Vektoren nach anderen Punkten der Indikatrix zugelassen sind. Bei einer einparametrischen Flächenschar bilden die \overrightarrow{MN} ein Vektorfeld, und man sieht sofort, daß $\operatorname{div} \overrightarrow{MN} = 0$ die richtige Bedingung für ein „geodätisches Feld“ ist, die natürlich der Eulerschen Bedingung für die Extremalen äquivalent ist. Boerner (München).

Integraltransformationen:

Murnaghan, F. D.: *The operational calculus.* Math. Mag., Texas **21**, 117—138 (1948).

Verf. beschreibt die bekannte Methode zur Lösung von gewöhnlichen, linearen Differentialgleichungen und von Systemen von solchen mittels Laplace-Transformation. Bei Systemen wird besonders der Fall diskutiert, daß die Determinante aus den Koeffizienten der höchsten Ableitung den Wert 0 hat, so daß die Anfangswerte der niedrigeren Ableitungen nicht beliebig vorgeschrieben werden können. Vgl. hierzu A. Ghizzetti: *Calcolo simbolico.* Bologna, 1943, S. 76—84. *Doetsch.*

Roettinger, Ida: *A generalization of the finite Fourier transformation and applications.* Quart. appl. Math. **5**, 298—319 (1947).

Die zur Integration von Differentialgleichungen unter Randbedingungen von Ref. [Math. Ann. **112**, 52—68 (1935); dies. Zbl. **13**, 159] eingeführte endliche Fourier-Transformation, in der später von H. Knieß [Math. Z. **44**, 266—292 (1938); dies. Zbl. **19**, 23] benutzten reellen Gestalt

$$f'(k) = \int_0^\pi F(x) \sin kx dx \equiv \mathfrak{S}\{F\} \quad \text{bzw.} \quad f(k) = \int_0^\pi F(x) \cos kx dx \equiv \mathfrak{C}\{F\}$$

(k ganzzahlig) ist dem Fall angepaßt, daß als Randbedingungen die Werte gewisser

Ableitungen für $x = 0$ und $x = \pi$ gegeben sind. So ist z. B.

$$\mathfrak{E}\{F^{(2r)}\} = (-1)^r k^{2r} \mathfrak{E}\{F\} + \sum_{s=0}^{r-1} (-1)^s k^{2s+1} [F^{(2r-2s-2)}(0) - (-1)^k F^{(2r-2s-2)}(\pi)],$$

so daß bei Anwendung der Transformation \mathfrak{E} die Randwerte $F(0)$, $F'(0)$, ..., $F^{(2r-2)}(0)$; $F(\pi)$, $F'(\pi)$, ..., $F^{(2r-2)}(\pi)$ gegeben sein müssen. Verf. verallgemeinert die endliche Fourier-Transformation nun so, daß beliebige lineare Kombinationen der Randwerte gegeben sein können. Dazu ersetzt sie die speziellen Funktionen $\sin kx$, $\cos kx$ (k ganzzahlig) durch die Eigenfunktionen $q_{k_n}(x)$ des Sturm-Lionvilleschen Problems:

$$\begin{cases} y''(x) + k^2 y(x) = 0 & (0 \leq x \leq \pi) \\ L_1(y) \equiv a_1 y(0) + a_2 y'(0) + a_3 y(\pi) + a_4 y'(\pi) = 0 \\ L_2(y) \equiv b_1 y(0) + b_2 y'(0) + b_3 y(\pi) + b_4 y'(\pi) = 0, \end{cases}$$

bei dem $a_1 b_2 - a_2 b_1 = a_3 b_4 - a_4 b_3$ vorausgesetzt wird, damit die Eigenwerte k_n reell ausfallen. Es ist

$$\begin{aligned} q_{k_n}(x) &= A_{k_n} \sin k_n x + B_{k_n} \cos k_n x \\ A_{k_n} &= -a_1 + a_3 \cos k_n \pi - a_4 k_n \sin k_n \pi, \\ B_{k_n} &= -k_n a_2 - a_3 \sin k_n \pi - a_4 k_n \cos k_n \pi. \end{aligned}$$

mit

Betrachtet man jetzt die Transformation

$$f(k_n) = \int_0^\pi F(x) q_{k_n}(x) dx = \mathfrak{T}\{F\},$$

so ergibt sich:

$$\mathfrak{T}\{F^{(2r)}\} = (-1)^r k_n^{2r} \mathfrak{T}\{F\} + \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s k_n^{2s} [\lambda L_1(F^{(2r-2s-2)}) + \mu L_2(F^{(2r-2s-2)})],$$

wo λ und μ gewisse Konstante sind, die sich aus den a , b , k_n berechnen. Man kann also mit dieser Transformation Differentialgleichungen angreifen, bei denen nur Ableitungen gerader Ordnung vorkommen und als Randbedingungen die Werte der Linearkombinationen $L_j(F^{(2r-2s-2)})$, $j = 1, 2$; $s = 1, 2, \dots, r-1$ gegeben sind. — Diese Methode wird auf eine Anzahl von speziellen Randwertproblemen für partielle Differentialgleichungen (Schwingungen, Wärmeleitung usw.) angewendet. Die notwendige Rücktransformation der im Bildbereich gewonnenen Lösung wird (ähnlich wie von den früheren Autoren im Fall der eigentlichen Fourier-Transformation) entweder vermittelt einer Tabelle von bekannten Original- und Bildfunktionen (unter Verwendung von Faltungssätzen in den speziellen Fällen $k_n = n$ und $k_n = n - \frac{1}{2}$) oder durch Entwicklung der Originalfunktion in eine Reihe nach den Eigenfunktionen des Sturm-Lionvilleschen Problems bewerkstelligt. — Einige beigelegte Tabellen von Original- und Bildfunktionen und von Transformationsformeln der Ableitungen für spezielle Fälle ($k_n = n$, $n - \frac{1}{2}$, Wurzeln der Gleichung $\operatorname{tg} k\pi = k/h$, usw.) erleichtern die praktische Anwendung der Methode. *Doetsch* (Freiburg i. Br.).

Stone, William Matthewson: The generalized Laplace transformation with applications to problems involving finite differences. *Iowa College, J. Sci.* **21**, 81–83 (1947).

Die Laplace-Transformation $\int_0^\infty e^{-st} F(t) dt = f(s)$ verwandelt die Operation der m -ten Ableitung von F in eine algebraische Operation an f . Für die Operation $EF(t) = F(t+1)$, $E^m F(t) = F(t+m)$ leistet dasselbe die folgende Transformation:

$$L\{F(t)\} E = f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F(n)}{s^{n+1}}.$$

Es ist nämlich

$$L\{E^m F(t)\} E = s^m f(s) = \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} F(k).$$

Ein System von Differenzengleichungen wird also in ein System von algebraischen Gleichungen transformiert. Ferner gilt, ähnlich wie bei der Laplace-Transformation:

$$L \{t^{(m)} F(t)\} E = \left(-\frac{d}{ds}\right)^m s^m f(s), \quad \text{wo } t^{(m)} = t(t-1) \dots (t-m+1).$$

Die Umkehrung der Transformation wird gegeben durch

$$F(n) = \frac{1}{2\pi i} \int z^n f(z) dz,$$

erstreckt über eine die Singularitäten von $f(s)$ einschließende Kurve. Dem Faltungssatz entspricht hier die Gleichung

$$L \left\{ \sum_{n=0}^{t-1} F(t-n-1) G(n) \right\} E = f(s) g(s).$$

Entsprechende Dienste leistet die Transformation

$$L \{F(k)\} M = f(s) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F(n)}{s^{n+1}} - \frac{F(0)}{s}$$

für die Operation $M F(k) = \frac{1}{2} (F(k+1) - F(k-1))$ (k ganz). *Doetsch.*

Widder, D. V.: Greens functions for linear differential systems of infinite order. Proc. nat. Acad. Sci. USA **33**, 31—34 (1947).

Löst man die Differentialgleichung unendlich hoher Ordnung

$$(1) \quad E(D) y(x) = \varphi(x),$$

wo

$$E(s) = s \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{a_k^2}\right) \text{ mit } 0 < a_1 < a_2 < \dots, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k^2} < \infty,$$

unter den Randbedingungen $y(-\infty) = 0$, $y(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt$, auf die bekannte Weise mit der zweiseitigen Laplace-Transformation, so erhält man zunächst formal die Lösung:

$$(2) \quad y(x) = G(x) * \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-t) \varphi(t) dt,$$

wo $G(t)$ durch $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} G(t) dt = \frac{1}{E(s)}$ definiert ist, also in der Form

$$G(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{xs}}{E(x)} ds \quad (0 < c < a_1)$$

dargestellt werden kann. Verf. stellt einen Beweis dafür in Aussicht, daß diese Lösung tatsächlich zutrifft. — Man kann auch umgekehrt die Gleichung (1) als die Lösung der Integralgleichung (2), d. h. als die Umkehrung der durch (2) ausgedrückten Integraltransformation auffassen. Speziell für $a_k = k$ wird $G(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$, also

hat (2) die Gestalt

$$y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{e^{-t} + e^{-x}} \varphi(t) dt \quad \text{oder} \quad f(x) = y\left(\log \frac{1}{x}\right) = \frac{\varphi\left(\log \frac{1}{x}\right)}{x+t} dt.$$

Führt man in (1) auch eine exponentielle Substitution aus, so ergibt sich:

$$\varphi\left(\log \frac{1}{x}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k! (k-2)!} [x^{2k-1} f^{(k-1)}(x)]^k,$$

also die vom Verf. [Trans. Amer. math. Soc. **43**, 7—60 (1938); dies. Zbl. **18**, 131] aufgestellte Umkehrformel für die Stieltjes-Transformation. Damit hat man einen allgemeinen Zugang zu Umkehrformeln dieses Typs von Integraltransformationen.

Doetsch (Freiburg i. Br.).

Widder, D. V.: The inversion of a generalized Laplace transform. Proc. nat. Acad. Sci. USA 33, 295—297 (1947).

Verf. formuliert ohne Beweis den folgenden Satz: Wenn $\Phi(x)$ stetig und absolut integrierbar von $-\infty$ bis $+\infty$ und $E(s) = s^p \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{a_k}\right) e^{s/a_k}$, wobei $0 < a_1 \leq$

$a_2 \leq \dots$ (a_i sind reelle Zahlen, p eine natürliche Zahl), $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k} < \infty$,

$G(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{st}}{E(s)} ds$, $0 < c < a_1$ und $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-t) \Phi(t) dt$, dann gilt

die Umkehrformel $E(D) f(x) = \Phi(x)$. $E(D)$ bedeutet den Differentialoperator von folgender Form:

$$E(D) = \lim_{n \rightarrow \infty} D^p \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{D}{a_k}\right) f(x + s_n), \text{ wobei } s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}.$$

Die Post-Widdersche Umkehrformel der L -Transformation steckt als Spezialfall in diesem Satz. Saxer (Zürich).

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Nikodym, O. M.: Sur les êtres fonctionoïdes; une généralisation de la notion de fonction. C. r. Acad. Sci., Paris 226, 375—377 (1948).

Nikodym, O. M.: Sur les êtres fonctionoïdes; procédé de complétion asymptotique. C. r. Acad. Sci., Paris 226, 458—460 (1948).

Nikodym, O. M.: Échelle spectrale et intégration des êtres fonctionoïdes. C. r. Acad. Sci., Paris 226, 541—543 (1947).

I. Der Begriff der (reellwertigen) Punktfunktion wird zu dem des „Funktionoids“ verallgemeinert, indem an die Stelle der Punktmengen eines Raumes Elemente („Somen“) einer Booleschen Algebra B (mit Einheit I und Nullelement \emptyset) treten.

Verf. bildet zunächst formale Aggregate $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$ (λ_i reell, $a_i \in B$), analog zu

Gruppenringelementen, und kennzeichnet sie axiomatisch: sie entsprechen den „Treppenfunktionen“. Nach Erklärung von $|x| = \sum \lambda_i |a_i|$, bas $x = \sum a_i$ („Basis“ von x ; \sum bedeutet in B Vereinigung), abs $x = \max \{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$, $x^* = x + \text{co bas } x$ („Fortsetzung“ von x auf I ; co $a = I - a$) ergeben sich einige Rechenregeln. —

II. Nach Einführung einer halbadditiven Maßfunktion μ auf B läßt sich eine Norm $d = ||x||$ erklären durch $\mu\{x\} \leq d$ bas $x \leq d \leq \mu\{x\}$ bas $x \leq d$ bas x ; es ist $|x| \leq \text{abs } x$, $|x| \leq \mu(\text{bas } x)$. Die Norm erzeugt eine Metrik und Konvergenz, mittels deren der Bereich der Aggregate x mit bas $x = I$ durch Fundamentalfolgen zu einem vollständigen Raum mit Elementen ξ, η, \dots abgeschlossen wird. Singemäß wird $|\xi|$, abs $\xi = \max \{ \sup \xi, |\inf \xi| \}$, $|\xi|$, gleichmäßige und gewöhnliche (asymptotische, Maß-)Konvergenz erklärt. B erfährt hierbei eine Abschließung zu B' . μ ist stetig fortsetzbar auf B' ; B' ist nicht notwendig vollkommen. — III. Durch die Bewertung $|x| = ||x|| + \mu(\text{bas } x)$ erhält man Funktionoide ξ mit bas $\xi \neq I$. Um jedem ξ eine Spektralschar oder charakteristische Schar $E(\lambda) = I \{ \xi \leq \lambda I \}$ zuordnen zu können, wird noch B' (nach MacNeille) zu einer vollkommenen Algebra B'' erweitert und die speziellere Klasse der Funktionoide mit abzählbarem Wertevorrat herangezogen. — Ist μ additiv, so wird $B'' = B'$, und man kann leicht das Integral $\int \xi d\mu$ durch das gewöhnliche Stieltjes-Integral $\int \lambda d\mu E(\lambda)$ erklären. — Andere Definition der Norm führt zu Funktionoidräumen von anderer Struktur, z. B. zu einem Hilbertschen Raum. — Allgemeiner können für die λ_i statt reeller Zahlen Elemente eines kommutativen Ringes genommen werden. Wecken (Haltigen).

Monna, A. F.: Sur les espaces linéaires normés. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 51, 197—210 (1948).

Poursuivant ses études sur les espaces normés sur un corps valué K dont la valuation est non archimédienne, l'a. caractérise par des conditions intrinsèques ceux de ces espaces qui sont isomorphes soit à un produit fini K^n , soit à l'espace K_0^∞ des suites (a_n) d'éléments de K telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, avec la norme $\sup_n |a_n|$.

Il montre que le dual de ce dernier espace est l'espace de toutes les suites bornées (a_n) d'éléments de K , avec la même norme $\sup_n |a_n|$; il étudie aussi les propriétés de la convergence forte et de la convergence faible dans K_0^∞ . *J. Dieudonné* (Nancy).

Hartman, Philip and Aurel Wintner: The (L^2) -space of relative measure. Proc. nat. Acad. Sci. USA 33, 128—132 (1947).

Introduce the notations

$$M(f) = \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{X} \int_0^X f(x) dx, \quad \bar{M}(p) = \limsup_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{X} \int_0^X p(x) dx$$

for functions $f(x)$, $p(x) \geq 0$, defined on $(0, \infty)$ which belong to the class (L^2) on every finite interval $(0, X)$, and for which the limit resp. the limit superior exists and has a finite value. If, for two measurable functions $f(x)$ and $g(x)$, $M(|f|^2)$ and $M(|g|^2)$ exist, then $\bar{M}(|f-g|^2)$ exists too, and as we have always $\bar{M}(p_1 + p_2) \leq \bar{M}(p_1) + \bar{M}(p_2)$ we can define a metric function space (N^2) as follows: The elements of (N^2) are the measurable functions $f(x)$ for which $M(|f|^2)$ exists, two functions $f(x)$, $g(x)$ being identified if $M(|f-g|^2) = 0$; the distance of $f(x)$ and $g(x)$ is then defined by $M(|f-g|^2)^{\frac{1}{2}}$. — It is clear that, if almost periodicity (B^2) is referred to the half-line $x > 0$ then $f(x)$ belongs to (N^2) whenever it belongs to (B^2) , and that the metrics in (N^2) and its subspace (B^2) are identical. But, while (B^2) is known to be a linear space, (N^2) is not linear. On the other hand, the completeness property of (B^2) proves to be shared by the full space (N^2) . Moreover, (N^2) may be imbedded in the linear and complete space (\bar{N}^2) consisting of all functions $f(x)$, $0 < x < \infty$, for which $\bar{M}(|f|^2)$ exists. In this space, too, the metric is defined by $M(|f-g|^2)^{\frac{1}{2}}$, and two functions are identified if their distance is 0. — One may define in an analogous way the spaces (N^p) and (\bar{N}^p) for an arbitrary $p \geq 1$. One has $(B^p) \subset (N^p) \subset (\bar{N}^p)$, all three spaces being complete, but only the first and third being linear. — Reference is made of the work of P. Nalli [Rend. Circ. mat. Palermo 38, 307, 318—319, 322—323 (1914)] and A. S. Besicovitch [Almost periodic functions, Cambridge 1932, S. 110—112; dies. Zbl. 4, 253].

Béla de Sz. Nagy (Szeged).

Ghezzi, S.: Sulla conservazione dell'esistenza di radici di un sistema di equazioni, nel passaggio al limite. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 2, 159—164 (1947).

L'Autrice indica parecchie condizioni sufficienti perchè da $G(x) = \lim_{r \rightarrow +\infty} F_r(x)$ e dall'esistenza di radici per le equazioni $F_r(x) = 0$ segua che esistono soluzioni anche per la $G(x) = 0$. — Per esempio, l'equazione $G(x) = 0$ ammette radici, se: 1. la $G(x)$ e le $F_r(x)$ son funzioni definite in una porzione Σ' di uno spazio metrico e lineare Σ ; 2. per ogni x di Σ' , tanto $G(x)$ quanto $F_r(x)$ sono elementi di Σ ; 3. le soluzioni, esistenti per ipotesi, delle $F_r(x) = 0$ variano in una porzione Σ'' di Σ' ; 4. Σ'' è compatta rispetto a Σ' e le $F_r(x)$ sono equicontinue in Σ'' oppure Σ'' è compatta in se stessa e le $F_r(x)$ sono, in Σ'' , continue ed uniformemente convergenti [verso $G(x)$]. — Fra l'altro l'Autrice deduce dai suoi criteri che il sistema $f_i(x_1, x_2, \dots) = 0$ ($i = 1, 2, 3, \dots$), definito nell'ipercubo C dello spazio hilbertiano $H \equiv (x_1, x_2, \dots)$ individuato dalle limitazioni $-1 \leq x_r \leq 1$ ($r = 1, 2, 3, \dots$), ammette soluzioni in C se le f_i son continue in C e soddisfanno alle condizioni

$$f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, -1, x_{i+1}, \dots) \leq 0, \quad f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots) \geq 0$$

e se le soluzioni (certo esistenti in virtù di teoremi noti) dei sistemi $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) son contenute in una porzione compatta di C .

G. Scorza Dragoni (Padova).

Praktische Analysis:

Uhler, Horace S.: Special values of e^{kr} , $\cosh(k\pi)$ and $\sinh(k\pi)$ to 136 figures. Proc. nat. Acad. Sci. USA **33**, 34—41 (1947).

Kineaid, W. M.: Numerical methods for finding characteristic roots and vectors of matrices. Quart. appl. Math. **5**, 320—345 (1947).

Zur angenäherten Bestimmung von charakteristischen Zahlen λ und Eigenvektoren X der Aufgabe $AX = \lambda X$ (mit A als gegebener quadratischer n -reihiger Matrix) wird zunächst das Iterationsverfahren beschrieben und eine Reihe von Abwandlungen zusammengestellt, so die Methode der Benutzung von Matrizenpotenzen, Aitkens δ^2 -Prozeß, das Verfahren der „Deflation“ (Abspaltung einer bereits ermittelten charakteristischen Zahl) und Anwendung von Orthogonalitätseigenschaften für die anderen charakteristischen Zahlen. Sodann entwickelt Verf. folgende Methode: Es werden erst Rohwerte A_j für die charakteristischen Zahlen λ_j ermittelt, etwa auf 3 geltende Stellen; dann bildet man ein Polynom $P(\lambda)$, etwa $(\lambda - A_1)(\lambda - A_2) \dots (\lambda - A_k)$, welches für $\lambda = A_1, A_2, \dots, A_k$ verschwindet, also für $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ kleine Werte annimmt (die Koeffizienten von $P(\lambda)$ können gewöhnlich zu ganzen Zahlen abgerundet werden). Wendet man das Iterationsverfahren auf die Matrix $P(A)$ an, so wird es gegen einen Eigenvektor konvergieren, der zu der dem Betrag nach größten von den restlichen Zahlen $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$ gehört; wählt man $k = n - 1$, so konvergiert das Verfahren im allgemeinen sehr rasch, so daß leicht eine große Genauigkeit erzielbar ist, gegen einen zu λ_n gehörigen Vektor. Ist der Vektor bekannt, folgt λ_n aus dem Rayleighschen Quotienten. Das Verfahren ist auch bei komplexen charakteristischen Zahlen anwendbar und kann auch benutzt werden, um algebraische Gleichungen zu lösen, indem man zu ihnen eine Matrix aufstellt, deren charakteristische Gleichung die vorgelegte algebraische Gleichung ist. Collatz (Hannover).

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Statistik:

● Thurstone, L. L.: Multiple-factor analysis. University of Chicago Press 1947. XIX, 535 S.

Elfvig, G.: Mathematische Statistik — Probleme, Methoden, Anwendungen. Elementa, Stockholm **30**, 209—225 (1947) [Schwedisch].

Eine elementare Übersicht über die wichtigsten Probleme und Anwendungen der mathematischen Statistik. Bergström (Uppsala).

Nandi, H. K.: A note on Student's t for paired samples. Bull. Calcutta math. Soc. **39**, 61—64 (1947).

Verf. untersucht zwei Formen des t -Tests, die bei Reihen von Zufallswerten angewendet werden, zwischen denen eine paarweise Zusammenfassung der Werte möglich ist. Während die Überprüfung der Differenzen zwischen den gepaarten Zufallswerten auf den Erwartungswert Null unter der Annahme der Unabhängigkeit der einzelnen Paare voneinander ein exaktes Verfahren darstellt, ist die entsprechende Überprüfung der Differenzen der Mittelwerte der als voneinander unabhängig angenommenen Reihen nur ein Näherungsverfahren. Die Verteilungsfunktion des dabei erhaltenen t -Wertes ist von dem Korrelationskoeffizienten für die Ausgangsverteilungen abhängig, so daß das Verfahren nur im Falle positiver Korrelation eine Kontrolle des Fehlers erster Art liefert. Wie eine experimentelle Untersuchung gezeigt hat, ist es für sehr kleine positive Werte des Korrelationskoeffizienten dem erstgenannten Verfahren in Hinblick auf den Fehler zweiter Art überlegen.

Georg Friede (Göttingen).

Cowden, Dudley, J.: Simplified methods of fitting certain types of growth curves. J. Amer. statist. Assoc. 42, 585—590 (1947).

Verf. liefert einen Beitrag zur Lösung des in der Praxis — nicht nur der Wachstumskurven — immer wieder auftretenden Problems der Anpassung einer Ersatzfunktion von geeignet gewähltem Typus an einen durch Beobachtung, Messung oder dgl. empirisch gewonnenen Werteverlauf. Hier handelt es sich um die unter einheitlichem Gesichtspunkt betrachteten Ersatzfunktionen $y = k + a b^x$ (erweiterte Exponentialfunktion), $y = k A^{b^x}$ (Gompertz-Funktion) und $y = \frac{k}{1 + 10^{a + b x}}$ (logistische Funktion), deren Bilder in einem halblogarithmischen Koordinaten-Netz bekanntlich gerade Linien sind, sofern die Ordinatenteilung beziehungsweise nach $\log(y - k)$, $\log \log \frac{y}{k}$ oder $\log\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{k}\right)$ erfolgt, wobei k „richtig“ bemessen sein muß.

— Nach kurzer Darlegung, wie man aus drei, mit äquidistanten Abszissen ausgewählten Werten einer nach Augenmaß bestimmten Trendlinie des vorgegebenen Typus die Konstanten der Ersatzfunktion rechnerisch ermitteln kann, bespricht Verf. die Möglichkeit, durch schrittweise Verbesserung eines zunächst versuchsweise angesetzten Wertes für k die Geradlinigkeit des graphischen Bildes der Funktion im halblogarithmischen Netz zu erreichen. Die übrigen Konstanten können ja dann auf einfache Weise durch Ablesung an der Bildgeraden gefunden werden. — Das in der Arbeit mitgeteilte Zahlenbeispiel behandelt das Wachstum der Bevölkerung in den USA. in den Jahren 1790 bis 1940. Hierbei werden die Konstanten der als Ersatzfunktion in Betracht gezogenen logistischen Funktion nach Auswahl dreier passender Funktionswerte zunächst rechnerisch bestimmt; alsdann zeigt Verf. am gleichen Material die vorher allgemein beschriebene Ermittlung der Konstanten auf graphischem Wege. Die in beiden Fällen gefundenen Trendgleichungen weisen nur geringfügige Abweichungen auf. Nach Ansicht des Ref. empfiehlt sich eine geeignete graphische Methode der Kurvenanpassung (Konstantenbestimmung) stets dann, wenn, wie bei den in der vorliegenden Arbeit behandelten Funktionstypen, dazu nicht ohne weiteres auf das „klassische“ Prinzip der kleinsten Quadratsumme der Abweichungen zurückgegriffen werden kann. So läßt sich z. B. durch ein ähnliches Verfahren auch die für viele praktische Anwendungen oft recht brauchbare „projektive“ Ersatzfunktion $y = \frac{a x + b}{x + c}$ behandeln. G. Wünsche (München).

Versicherungsmathematik. Finanzmathematik:

Pentikäinen, Teivo: Einige numerische Untersuchungen über das risiko-theoretische Verhalten von Sterbekassen. Skand. Aktuarietsskr. 1947, 75—87 (1947).

Bezeichnet man mit x die gesamte Nettorisikosumme, die eine Versicherungseinrichtung (Sterbekasse) im Laufe eines Zeitabschnittes infolge des Eintrittes von Todesfällen verliert, ferner mit P die zur Deckung dieser Ausgabe zur Verfügung stehenden Nettorisikoprämien und mit A einen zum Ausgleich zufälliger Schwankungen von x noch vorhandenen Reservefonds, so kann man nach der Wahrscheinlichkeit ϵ dafür fragen, daß innerhalb der betrachteten Periode die Ungleichung $x > P + A$ besteht. — Zur approximativen Abschätzung dieser „Ruinwahrscheinlichkeit“ benutzt Verf. die Funktion $F(x, K)$ von Esscher [Skand. Aktuarietsskr. 15, 175—195 (1932); dies. Zbl. 4, 361]. Dabei wird abweichend von Hultman [Skand. Aktuarietsskr. 25, 84—119 (1942); dies. Zbl. 27, 416] anstatt P die von der Verteilung $p(z)$ der Nettorisikosummen z unabhängige Zahl K der in der Untersuchungsperiode zu erwartenden Todesfälle als Veränderliche gewählt. Als weiteres Argument ist die „relative Ruingrenze“ $\alpha = (P + A)/P$ eingeführt ($P = K m$, m = Mittelwert der fälligen Risikosummen). Die Funktion $F(x, K)$, von Esscher zunächst unter der Voraussetzung eines kontinuierlichen $p(z)$ abgeleitet, wird in der vorliegenden Arbeit mit sehr gutem Erfolg auf diskrete (darunter auch stark extreme) Verteilungen der Risikosummen angewandt. — Verf. gibt die wesentlichen Resultate seiner umfangreichen Berechnungen anstatt in tabellarischen Übersichten sogleich in Kurvenschartafeln wieder und vermittelt damit neben dem zahlenmäßigen auch bereits ein anschauliches Bild der Funktion $F(x, K)$ in ihrer Abhängigkeit von den Veränderlichen x und K . Es zeigt sich dabei im graphischen Bilde besonders das Ergebnis, daß die Stabilität einer Kasse im wesentlichen von der Größe der Reserve A und vom Um-

fang des Versicherungsbestandes abhängt, von dessen Zusammensetzung jedoch nur in untergeordnetem Maße beeinflusst wird. Zwei kleinere Zahlenbeispiele, die sich mit der Ermittlung der Ruinwahrscheinlichkeit für die Sterbekasse der finnischen Telegraphenbeamten und der kleinsten zulässigen Mitgliederzahl einer neu zu gründenden Sterbekasse befassen, zeigen u. a., wie mit Vorteil von Kurvenschartafeln zur Bestimmung der gesuchten Werte Gebrauch gemacht wird. — Die Arbeit stellt einen begriffswerten Beitrag zur Anwendung der modernen (kollektiven) Risikotheorie dar, an deren Ausbau gerade die skandinavischen Länder besonderen Anteil haben. Nach Ansicht des Ref. wäre es zur Schaffung geeigneter praktischer Methoden für laufende Stabilitätsuntersuchungen von Versicherungseinrichtungen und damit überhaupt im Hinblick auf eine weitere Verbreitung der auch für die Praxis bedeutsamen Ergebnisse der neueren risikothoretischen Forschung durchaus notwendig, mehr noch als bisher die Zusammenhänge in zahlenmäßiger Durchleuchtung an Hand bestimmter Aufgabeneinstellungen aufzuzeigen. Dabei wird, wie auch sonst in der modernen Versicherungsmathematik, zweckmäßigen nomographischen Behandlungsweisen eine wachsende Bedeutung beizumessen sein. So ließe sich für den praktischen Gebrauch beispielsweise auch schon die in Abb. 2 der hier besprochenen Arbeit wiedergegebene Kurvenschartafel nach Einführung entsprechender linearer Ersatzfunktionen und nachfolgender dualer Abbildung in ein einfaches Fluchtliniennomogramm verwandeln. *G. Wünsche* (München).

Sala, F.: Sur une méthode approximative pour le calcul des primes pures pour quelque position caractéristique, sans connaître autre que les probabilités annuelles de survie pour les âges de 10 en 10 ans. *Verzekerings-Arch.* 27, 128—134 (1947).

Es seien nur die Sterbewahrscheinlichkeiten q_x für einige Alter (z. B. $x = 20, 30, 40, \dots$) bekannt; bei zweimaliger Anwendung der Lubbockschen Formel werden zuerst die D_x und dann die N_x berechnet; damit ist ein Vergleich von Prämien usw. leicht und rasch durchführbar. Numerische Beispiele. *Bruno de Finetti* (Trieste).

Roy, René: La distribution du revenu entre les divers biens. *Econometrica*, Menasha 15, 205—225 (1947).

Die Preise p_1, \dots, p_n und das Einkommen r einer Person A seien gegeben: die ihm erreichbaren Mengengesamtheiten q_1, \dots, q_n stellen die Ebene $\sum_i p_i q_i = r$ dar. Sind die $U(q_1, \dots, q_n) = \text{const}$ die Indifferenzflächen für A , so ist der Gleichgewichtspunkt Q für A bekanntlich dadurch gekennzeichnet, daß die durch Q gehende Indifferenzfläche dort $\sum_i p_i q_i = r$ als Tangentialebene hat. Verf. zeigt, daß umgekehrt Q durch p_1, \dots, p_n und r (bzw. wegen der Homogenität, durch $p_1/r, \dots, p_n/r$) bestimmt werden kann, und bemerkt, daß die Anwendung dieser „dualen“ Systeme von Preiskoordinaten (Tangentialkoordinaten) oft zweckmäßig ist. Schreibt man z. B. $U = \Phi(p_1, \dots, p_n, r)$, so sind die Mengen q_i explizit gegeben durch $q_i = - \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \bigg/ \frac{\partial \Phi}{\partial r}$; usw. *Bruno de Finetti* (Trieste).

Woolley, Herbert D.: The general elasticity of demand. *Econometrica*, Menasha 15, 226—230 (1947).

Änderungen im Preissystem verursachen Änderungen in den (von einer Person mit feststehendem Einkommen) gekauften Mengen: diese Änderungen hängen hauptsächlich von der Hesseschen Matrix der $u_{rs} = \partial^2 u / \partial x_r \partial x_s$ ab [$u = u(x_1, \dots, x_n)$ = Nützlichkeitsfunktion; x_1, \dots, x_n = Mengen]. Die Verbindung kann durch geeignete „Elastizitätskoeffizienten“ ausgedrückt werden; ihre Berechnung wird vom Verf., durch Verallgemeinerung der Methode von Hicks, durchgeführt.

Bruno de Finetti (Trieste).

Girshick, M. A. and Trygve Haavelmo: Statistical analysis of the demand for food: Examples of simultaneous estimation of structural equations. *Econometrica*, Menasha 15, 79—110 (1947).

Die Verff. beschäftigen sich mit dem Problem, die Mengen als Funktionen der Preise und des Einkommens auszudrücken (es wird ein zufälliger Störungstermin betrachtet). Kritische Untersuchung über die Möglichkeit, aus Beobachtungsdaten die Beziehungen zu bestimmen. Für lineare Beziehungen wird das Problem gelöst und eine Anwendung (betreffend Nahrungsmittel, USA 1922—1941) numerisch durchgeführt.

Bruno de Finetti (Trieste).

Geometrie.

Grundlagen. Nichteuclidische Geometrie:

Reidemeister, K.: Raum und Erfahrung. Studium gen., Berlin, 1, 32—38 (1947).

Der üblichen Auffassung eines metrischen Raumes als einer Punktmannigfaltigkeit, über welcher ein Abstands begriff für Punktpaare erklärt ist, steht mit Bezug auf den wirklichen Raum die Tatsache entgegen, daß dieser Raum sich effektiv nur durch die räumlichen Beziehungen der Dinge in ihm erforschen läßt. Dieser Tatsache kann dadurch Rechnung getragen werden, daß statt der Punkte „Stellen im Raum“ als Grundelemente des wirklichen Raumes eingeführt werden, genauer die Stellen, die ein bewegliches Ding in bezug auf ein anderes, beharrendes, einnehmen kann. Ein solcher Stellenraum ist ein mögliches und, durch seine Wirklichkeitsnähe, interessantes Objekt der kombinatorischen Topologie. Es ist nicht schwer, den Euklidischen Punktraum als eine naheliegende Idealisierung eines solchen Stellenraumes zu interpretieren. Die Betrachtung wird abgeschlossen durch den Vorschlag, daß der Versuch gemacht werden sollte, die ebene lineare Geometrie mit Hilfe der Relation „von A aus liegt B links von C “ aufzubauen. Der Verf. vermutet, daß die Durchbildung der linearen Stellengeometrie in den konvexen Stellengebieten einen fruchtbaren Gegenstand finden wird. Heinrich Scholz (Münster).

Hall, Marshall, jr.: Cyclic projective planes. Duke math. J. 14, 1079—1090 (1947).

Eine projektive Ebene, in der der Desarguessche Satz nicht zu gelten braucht, heißt zyklisch, wenn eine projektive Abbildung dieser Ebene auf sich existiert, die eine zyklische Permutation der Punkte (und also auch der Geraden) dieser Ebene induziert. Singer [Trans. Amer. math. Soc. 43, 377—385 (1938); dies. Zbl. 19, 5] hat gezeigt, daß jede endliche projektive Ebene, in der der Satz von Desargues gilt, zyklisch ist. Verf. gibt ein allgemeines zahlentheoretisches Konstruktionsverfahren für zyklische projektive Ebenen, das insbesondere benutzt wird, um die Existenz unendlicher zyklischer Ebenen zu erweisen. — Wenn Π eine zyklische projektive Ebene ist, dann ist es möglich, die Punkte und Geraden in Π so zu numerieren: $P(i)$ und $m(i)$, daß die Abbildung, die $P(i)$ in $P(i+1)$ und $m(i)$ in $m(i+1)$ überführt, eine projektive Selbstabbildung von Π ist. Die Abbildung von $P(i)$ auf $m(-i)$ und von $m(-i)$ auf $P(i)$ ist dann eine Polarität von Π . Besondere Aufmerksamkeit wird weiter den Multiplikatoren von Π gewidmet; dies sind Zahlen t mit der Eigenschaft, daß die Abbildung von $P(i)$ auf $P(ti)$ eine projektive Selbstabbildung von Π ist. Reinhold Baer (Urbana, Illinois).

Elementargeometrie:

Thébault, Viktor: Sur une sphère associée au tétraèdre. C. r. Acad. Sci., Paris 225, 1260—1261 (1947).

In einem Tetraeder $T \equiv ABCD$ seien AA' , BB' , CC' , DD' die Höhen, die die Umkugel (O) in A_1 , B_1 , C_1 , D_1 schneiden, G der Schwerpunkt, K der erste Lemoinesche Punkt, M der Mongesche Punkt. M_a , M_b , M_c , M_d seien die Mongeschen Punkte der Tetraeder $T_a \equiv A_1 BCD$, $T_b \equiv B_1 CDA$, $T_c \equiv C_1 DAB$, $T_d \equiv D_1 ABC$. Dann entsteht das Tetraeder $t \equiv M_a M_b M_c M_d$ durch die Homothetie ($G, 3$) aus dem Fußpunktetetraeder des Mittelpunktes O_{12} der Zwölfpunktkugel des Tetraeders T . Die Tetraeder T , t sind ortholog, ihre Orthologiezentren M und O'_{12} , der isogonalverwandte von O_{12} in T . Die in der Überschrift gemeinte Kugel ist die Umkugel (O') von t . Diese ist zugleich Fußpunktkugel von M in dem antikomplementären Tetraeder T'_1 von T . Ihr Mittelpunkt O' teilt die Strecke OO'_{12} im Verhältnis 2:1. Die Kugel (O') wird zu einer Ebene, wenn O_{12} auf der kubischen Fläche von Cayley liegt. Außer einigen auf das orthozentrische Tetraeder bezüglichen Sätzen beweist Verf. noch, daß sich die von R. Deaux [Mathesis 46, 147—149 (1932)] gefundenen

drei Ebenen, die die Höhen eines beliebigen Tetraeders in einem und demselben Verhältnis teilen, im ersten Lemoineschen Punkt schneiden. *Zacharias.*

Kerawala, S. M.: Poncelet porism in two circles. Bull. Calcutta math. Soc. **39**, 85—105 (1947).

Betrachten wir zwei Kreise, so daß es ein Dreieck gibt, das dem ersten ein-, dem zweiten umbeschrieben ist. Bedenken R und r die Halbmesser, d den Abstand der Mittelpunkte der Kreise, so gilt nach einem wohlbekannten Satz von Euler $R^2 - 2Rr = d^2$. Es handelt sich hier um die analoge Bedingungsgleichung für ein n -Eck. Das Problem wurde von mehreren Autoren untersucht, aber — abgesehen von einem Ergebnis von T. W. Chaundy [Proc. Lond. math. Soc., II. s. **22**, 104 bis 123 (1923); **25**, 17—44 (1926)], der das Problem mit Hilfe elliptischer Funktionen für alle Primzahlwerte von n erledigt — nur in verhältnismäßig wenigen Einzelfällen gelöst. Verf. erhält nun in systematischer Weise auf einem elementaren Weg die Lösung des Problems für eine große Anzahl von Werten n , die alle bisher mit elementaren Hilfsmitteln erreichten Ergebnisse enthält, ja sogar weit überschreitet. Es sei hervorgehoben, daß Bedingungsgleichungen, die nach Chaundys Rechnungen „unabdruckbar“ waren, hier in höchst einfacher Gestalt erscheinen. Auch manche fehlerhafte Ergebnisse von Chaundy werden richtig angegeben. *L. Fjés Tóth.*

Mirangoni, Ardicio: Alcune considerazioni suggerite dalla figura con cui si suole dimostrare il teorema di Pitagora. Boll. Mat., Genova, V. s. **1**, 2—4 (1947).

Zur Herleitung der Beziehungen zwischen den Elementen der Figur, welche beim Beweise des Pythagoreischen Satzes vorkommt, benutzt Verf. die Tatsache, daß von drei ähnlichen Figuren, welche über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks konstruiert sind, irgend zwei durch eine Drehstreckung und evtl. Spiegelung auseinander hervorgehen. *E. Egerváry* (Budapest).

Algebraische Geometrie:

Burau, W.: Lineare Räume auf quadratischen Hyperflächen. Ber. Math.-Tagung Tübingen 1946, 59 (1947).

Keller, O.-H.: Eine charakteristische Determinante ebener algebraischer Berührungstransformationen. Ber. Math.-Tagung Tübingen 1946, 88—91 (1947).

Schmidt, Hermann: Eine Verallgemeinerung der projektiven Inversion. Ber. Math.-Tagung Tübingen 1946, 129—130 (1947).

Lesieur, L.: Les problèmes d'intersection sur une variété de Grassmann. C. R. Acad. Sci., Paris **225**, 916—917 (1947).

Kurze Ausführungen über das Rechnen mit den Schurschen charakteristischen Funktionen in dem von Schubert geschaffenen, von Lefschetz und van der Waerden exakt begründeten Kalkül der abzählenden Geometrie im Anschluß an eine andere Note des Verf. (vgl. dies. Zbl. **29**, 8). Erläuterung der allgemeinen Vorschriften an Beispielen (u. a. Bestimmung der Anzahl der gemeinsamen Ebenen dreier Hyperflächen 2. Ordnung V_2^2 im S_8). *Krull* (Bonn).

Motzkin, Th. and A. Robinson: The characterization of algebraic plane curves. Duke math. J. **14**, 837—853 (1947).

S bedeute eine Punktmenge in der projektiven Ebene, deren Koordinaten einem kommutativen Körper F beliebiger Charakteristik angehören. Jedem Punkt p von S ist eine „Multiplizität“ l/p hinsichtlich jeder durch p gehenden Geraden l zugeordnet. Das „zyklische Verhältnis“ (ZV) von S in bezug auf ein Dreieck ist das Produkt aller Teilverhältnisse, in welchen die auf den Dreiecksseiten liegenden Punkte von S diese teilen (mit Berücksichtigung ihrer Multiplizität). Hat S in bezug auf jedes Dreieck, dessen Eckpunkte weder S noch der Geraden l_∞ angehören, das ZV 1, so heißt S eine „Carnotmenge“. Im Anschluß an eine Beweismethode von Berzolari [Sulla determinazione d'una curva o d'una superficie algebrica e su alcune questioni

di postu'azione, Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend. Cl. Sci. mat. natur., II. s. 47, 556—564 (1914)] beweisen Verff. unter der Voraussetzung, daß F unendlich ist, den Satz: Eine Carnotmenge, welche mit beinahe jeder Geraden höchstens n Punkte gemeinsam hat, ist eine algebraische Kurve der Ordnung n , eventuell mit Ausnahme von Punkten auf l_∞ („beinahe“ = mit Ausnahme von höchstens endlich vielen). Vermeidet man die Einführung von Multiplizitäten, so gilt: Eine Punktmenge S ist notwendig eine algebraische Kurve der Ordnung n , wenn sie beinahe jede Gerade durch beinahe jeden Punkt in n verschiedenen Punkten trifft und für jedes Dreieck das ZV 1 besitzt, dessen Eckpunkte weder auf S noch auf l_∞ liegen und dessen Seiten S in n verschiedenen Punkten treffen. Weitere Sätze folgen, wenn auch Dreiecke betrachtet werden, von denen 1 oder 2 Eckpunkte auf l_∞ liegen. Durch Konstruktion allgemeiner Punktmengen, die nicht algebraische Kurven sind, wird gezeigt, daß die angegebenen Bedingungen unabhängig und notwendig sind. Gröbner (Innsbruck).

Chatelet, François: Sur la réalité des courbes unicursales. Rev. Sci., Paris 85, 709—715 (1947).

Eine ebene Kurve C der reellen Gleichung $P(x, y) = 0$ ist dann und nur dann unkursal (rational), wenn eine rationale Parameterdarstellung $x = F(t)$, $y = G(t)$, $t = H(x, y)$ existiert. t ist bis auf eine lineare gebrochene Substitution bestimmt; daher kann man zur eindeutigen Festlegung noch die Parameterwerte in 3 Kurvenpunkten vorschreiben. Kennt man keine reellen Kurvenpunkte, so wird die ermittelte Parameterdarstellung komplexe Koeffizienten aufweisen. Verf. beantwortet die Frage, wie man in diesem Fall die reellen Kurvenpunkte gewinnt, und kommt zum Ergebnis, daß immer eine reelle Parameterdarstellung existiert, wenn C mindestens einen (sc.einfachen) reellen Punkt besitzt; andernfalls steht C in einer reellen birationalen Korrespondenz zur Konik $x^2 + y^2 + 1 = 0$. Gröbner (Innsbruck).

Kasner, E. and J. de Cicco: The curvature of the polar curves of a general algebraic curve. Amer. math. Monthly 54, 263—268 (1947).

C_n sei eine algebraische Kurve n -ten Grades. C_{n-1} vom Grade $n-1$ sei die erste Polare eines Punktes O allgemeiner Lage auf C_n bezüglich C_n . Entsprechend sei C_{n-r} die r -te Polare von O . Dann haben bekanntlich all diese Polaren in O eine gemeinsame Tangente. Verff. geben mehrere Beweise für den Satz: Das Verhältnis ϱ_1 der Krümmungen von C_n und C_{n-1} im Punkt O , das nach Mehmke-Segre projektiv-invariant ist, hängt nur ab von der Ordnungszahl n und dementsprechend das Krümmungsverhältnis ϱ_r von C_n und C_{n-r} nur von n und r . Es ist

$$\varrho_1 = \frac{n-2}{n-1} \quad \text{und} \quad \varrho_r = \frac{n-r-1}{n-1} \cdot W. Haack \text{ (Bad Gandersheim).}$$

Kasner, Edward and John de Cicco: General polar theory. Scripta math., New York 13, 53—57 (1947).

Die Verff. geben einen Überblick über einige Sätze der Polarentheorie algebraischer Kurven, die schon an anderen Stellen veröffentlicht sind (s. vorsteh. Referat). W. Haack (Bad Gandersheim).

Kinematik:

- Cazin, M. and J. Viard: Les trièdres non commutatifs non-holonomes en cinématique opératoirelle. C. r. Acad. Sci., Paris 224, 452—454 (1947).
- Viard, J.: Calcul tensoriel gauche. C. r. Acad. Sci., Paris 224, 543—545 (1947).
- Viard, J.: Définition d'un repère privilégié en mécanique ondulatoire. C. r. Acad. Sci., Paris 224, 800—802 (1947).

Elemente eines nichtkommutativen Vektor- und Tensorkalküls zur Darstellung der quantenmechanischen Kinematik. C. F. v. Weizsäcker (Göttingen).

Schoot, J. H.: Skalare oder vektorische Behandlung von kinematischen Begriffen? Nieuw Tijdschr. Wiskunde 35, 208—209 (1947) [Holländisch].

Glagolev, A. A.: Über die Konstruktion der Burmesterschen Punkte. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 58, 1881—1882 (1947) [Russisch].

Unter Burmesterschen Punkten einer Ebene versteht man diejenigen Punkte, die bei 4 festen durch Bewegung auseinander hervorgegangenen Lagen einer Ebene zur Deckung gelangen und dann auf einem Kreise liegen. Die Gesamtheit der Burmesterschen Punkte erfüllt eine Kurve, die von Hackmüller [Z. angew. Math. Mech. 18, 252—254 (1938); dies. Zbl. 19, 137] analytisch beschrieben worden ist. Hier wird gezeigt, wie man rein geometrisch zu 4 vorgegebenen Burmesterpunkten beliebig viele weitere konstruieren kann. *Bureau (Hamburg).*

Dizioğlu, Bekir: Totlagen eines räumlichen Kurbeltriebes. Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul A 16, 41—50 (1948).

Sind zwei Achsen vorgegeben, deren eine die Drehachse einer Kurbel, deren andere die Mittelachse einer Schwinge darstellt, so kann die Umwandlung der drehenden in die schwingende Bewegung durch eine Koppel fester Länge erfolgen, die Kurbel und Schwinge durch Kugelzapfen miteinander verbindet. Es werden im Falle windschiefer bzw. sich kreuzender Achsen die Totlagen berechnet, und danach wird mit den Methoden der darstellenden Geometrie die Aufgabe behandelt, eine Kurbelschwinge mit gegebenem Schwingenausschlag und vorgegebenem Kurbeldrehwinkel bei gleichen oder verschiedenen Zeiten für Hin- und Rückgang zu konstruieren. Allgemeinere derartige Aufgaben werden angedeutet. *Schmeidler.*

Haag, J.: Sur les joints homocinétiques. C. r. Acad. Sci., Paris 224, 693—695 (1947).

Für maschinentechnische Anwendungen von Interesse ist das Problem, zwei gegebene Achsen „homokinetisch“, d. h. so zu verbinden, daß die Drehungsgeschwindigkeit um beide Achsen übereinstimmt. Auf Grund elementarer Rechnung ergibt sich eine unendliche Mannigfaltigkeit solcher Verbindungen; ist die eine Achse fest, die andere wenig veränderlich, so läßt sich die Variation des Winkels ι berechnen, dessen Konstanz bei zwei festen Achsen die „Homokinetik“ garantiert.

W. Schmeidler (Berlin).

Differentialgeometrie in euklidischen Räumen:

Aleksandrov, A. D.: Die Methode des Zusammenheftens in der Theorie der Flächen. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 57, 863—865 (1947) [Russisch].

In früheren Noten (Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 51, Nr. 5; 54, Nr. 2) hat Verf. Bedingungen dafür angegeben, daß eine aus mehreren metrischen Flächenstücken zusammengeheftete Fläche in jedem Punkte eine konvexe Metrik besitzt oder im großen einer konvexen Fläche isometrisch ist. Verf. deutet hier einige Anwendungen dieser Sätze an, u. a. eine Kennzeichnung der mit geodätisch konvexen Stücken einer konvexen Fläche isometrischen Flächenstücke, sowie Sätze über den Flächeninhalt geodätischer Polygone und ein damit zusammenhängendes Extremalproblem. *Pannwitz (Berlin).*

Cicco, J. de: Geodesic perspectivities upon a sphere. Amer. math. Monthly 54, 142—147 (1947).

Verf. setzt die Überlegungen früherer Arbeiten [Proc. nat. Acad. Sci. 31 (1945)] fort und beweist: Die einzigen Flächen, die sich perspektiv so auf eine Bildkugel abbilden lassen, daß die geodätischen Linien in die Großkreise der Bildkugel übergehen, sind Ebenen oder Kugeln, deren Mittelpunkte mit dem Perspektivitätszentrum und dem Mittelpunkt der Bildkugel auf einer Geraden liegen. — Auf einer beliebigen Fläche gibt es im allgemeinen 3 einparametrische Scharen geodätischer Linien, die perspektiv in Großkreise der Kugel abgebildet werden. *W. Haack (Bad Ganderheim).*

Maneng, L.: Sur les parties réelle et imaginaire des formes minima d'une surface. C. r. Acad. Sci., Paris 225, 1115—1116 (1947).

Wenn \tilde{c}_1 und \tilde{c}_2 die Bogen-differentiale der Krümmungslinien einer Fläche und $I = ds^2 = \tilde{c}_1^2 + \tilde{c}_2^2$, $II = \Phi = a \tilde{c}_1^2 + c \tilde{c}_2^2$ ($a > c$) ihre beiden Grund-

formen sind, so kann man mittels der linearen Differentialformen $\vartheta_1 = \sqrt{\Phi - c} ds^2$ und $\vartheta_2 = \sqrt{a ds^2 - \Phi}$ die von V. Lalan [C. r. Acad. Sci., Paris **222**, 707 (1946)] eingeführten beiden (komplexen) „Minimalformen“ ω_1 und ω_2 der Fläche in der Form schreiben:

$$2\omega_1 = \vartheta_1 + i\vartheta_2, \quad 2\omega_2 = \vartheta_1 - i\vartheta_2.$$

Die linearen Formen ϑ_1 und ϑ_2 sind also der Real- und Imaginärteil der Minimalformen ω_1 und ω_2 von Lalan. Setzt man weiter mit Lalan $d\omega_1 = r[\omega_1 \omega_2]$ und $d\omega_2 = s[\omega_1 \omega_2]$ und mit Verf. $d\vartheta_1 = \alpha[\vartheta_1 \vartheta_2]$ und $d\vartheta_2 = \beta[\vartheta_1 \vartheta_2]$ (Cartansche Schreibweise der alternierenden Differentialformen), so folgt

$$r = \beta + i\alpha, \quad s = \beta - i\alpha.$$

Die Simultaninvarianten α und β der Formen ϑ_1 und ϑ_2 sind also Imaginär- und Realteil der Lalanschen Invarianten r und s . K. Strubecker (Karlsruhe).

Löbell, F.: Flächenabbildungen mit gemeinsamem Invariantensystem. Math. Ann., Berlin **120**, 21—35 (1947).

Sind $r(u, v)$ und $\eta(u, v)$ die Ortsvektoren zweier reellen Flächen im Euklidischen R_3 , die durch gleiche Parameterwerte eineindeutig aufeinander bezogen sind, so wird die Affinität, die diese Abbildung an einer Stelle in erster Ordnung verwirklicht, im Raume eindeutig festgelegt durch Angabe der Vektordifferentialinvarianten

$$\mathbf{j}_1(u, v) = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v, \quad \mathbf{j}_2(u, v) = \eta_u \times \eta_v, \quad \mathbf{j}(u, v) = \mathbf{r}_u \times \eta_v - \mathbf{r}_v \times \eta_u,$$

zu denen in gewissen Fällen noch der Skalar $j(u, v) = \mathbf{r}_u \eta_v - \mathbf{r}_v \eta_u$ hinzugenommen werden muß. — Die Arbeit zeigt, daß diese Invarianten das Flächenpaar nicht immer bis auf Parallelverschiebung oder Spiegelung an einem Punkte im Raum eindeutig festlegen. Gehören die Invarianten zu zwei Regelflächen mit entsprechenden Erzeugenden, bei denen jedes Erzeugendenpaar ähnlich aufeinander bezogen ist, so hängen die möglichen Paare von Funktionen einer Veränderlichen ab, in anderen Fällen gibt es endlich viele Paare, oder sie hängen von einer Konstanten ab. Bol.

Saban, Giacomo: Raccordement d'ordre élevé de deux surfaces réglées. Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul A **13**, 78—96 (1948).

Verf. geht aus von Blaschkes Ableitungsgleichungen für Regelflächen in dualen Einheitsvektoren. Mit der dualen Einheit $\varepsilon^2 = 0$ sind $P = 1 + \varepsilon \delta$ und $Q = q + \varepsilon q$ die Invarianten einer Regelfläche \Re als Funktionen der Bogenlänge s des sphärischen Bildes. Nach einem Vorschlag von K. Erim führt Verf. den dualen Parameter

$$S = s + \varepsilon \int_0^s \delta ds$$

ein und erhält aus den Blaschkeschen Formeln die Ableitungsgleichungen einer dualen sphärischen Kurve mit dualen Parameter S und der einzigen dualen Invarianten $\sigma = Q/P$. Den Ort der Krümmungsachsen $\Re^{(1)}$ (= duale Übertragung des Darboux-Vektors) von \Re nennt Verf. die I. Evolute; die Krümmungsachsen $\Re^{(2)}$ von $\Re^{(1)}$ erzeugen die zweite Evolute usw. Verf. zeigt, daß die Größen $S^{(k)}$ und $\sigma^{(k)}$ Funktionen der ersten k Ableitungen von σ nach S sind. — Zwei Regelflächen, die sich in n -ter Ordnung berühren, haben in der Berührungserzeugenden die ersten $(n-1)$ Krümmungsachsen und die ersten $(n-1)$ Ableitungen von δ nach s gemeinsam. — Im zweiten Teil konstruiert Verf. durch duale Übertragung kurventheoretischer Überlegungen, ausgehend von der $(n-1)$ -ten Evolute einer Regelfläche \Re , Approximationsflächen, die \Re in n -ter Ordnung berühren. Haack.

Beerten, G. und V. van Bouchout: Strahlenkongruenzen mit einer abwickelbaren Fokalfläche. Simon Stevin wis. natuurr. Tijdschr. **25**, 33—44 (1947) [Holländisch].

Aufstellung eines Formelapparates für die Euklidische Differentialgeometrie solcher Kongruenzen, bei denen die Darstellung mit Hilfe von Asymptotenlinienparametern der Brennfläche versagt. Bol (Freiburg i. Br.).

Springer, C. E.: Union torsion of curve on a surface. Amer. math. Monthly **54**, 259—262 (1947).

Einer Fläche $x^i(u^1, u^2)$ sei eine Geradenkongruenz $\lambda(u^1, u^2) - \lambda$: Einheitsvektor

-- zugeordnet. Verf. nennt eine Kurve *union curve* (man könnte sagen: relativ-geodätische Linie), wenn ihre Schmieg Ebene λ enthält. Die Torsion τ dieser Kurven wird berechnet. — Die Schnittkurven der Regelflächen der λ -Kongruenz nennt Verf. das *intersector net* (man könnte entsprechend Relativ-Krümmungslinien sagen). Vergleich ihrer Differentialgleichung mit τ ergibt: Eine relativ-geodätische Linie ist dann und nur dann eben, wenn sie gleichzeitig Relativ-Krümmungslinie ist.

Gericke (Freiburg i. Br.).

Charrueau, A.: Sur les congruences de droites ou de courbes déduites d'une surface quelconque. C. r. Acad. Sci., Paris 225, 792—794 (1947).

Aus einer gegebenen Fläche erhält Verf. durch eine ziemlich komplizierte Konstruktion zwei Geradenkongruenzen, deren developpablen Flächen den Asymptotenlinien L der gegebenen Fläche entsprechen, und auch eine neue Fläche, auf welcher den Linien L die Linien eines konjugierten Systems entsprechen. Man findet hier ohne Beweis eine lange Reihe geometrischer Eigenschaften der definierten Gebilde.

E. G. Togliatti (Genova).

Charrueau, A.: Sur les congruences de droites ou de courbes déduites d'une surface quelconque. C. r. Acad. Sci., Paris 225, 1055—1058 (1947); Correction: C. r. Acad. Sci., Paris 225, 1396 (1947).

Diese Mitteilung ist eine Fortsetzung einer früheren desselben Verf. (s. vorsteh. Referat); die dort angegebene Transformation T , die gestattet, aus einer gegebenen Fläche s eine neue Fläche S abzuleiten, führt hier zu einer Reihe neuer Entwicklungen. Wenn z. B. die Fläche S gegeben ist, so erhält man aus T^{-1} zwei entsprechende Flächen s, s' , die zusammen die Fokallfläche einer gewissen W -Strahlenkongruenz bilden. Verf. betrachtet auch den Fall, wo s und s' zusammenfallen usw.

E. G. Togliatti (Genova).

Schuh, Fred.: Verfolgungsproblem und Übersetzproblem. Mathematica, Groningen 14, 49—68 (1947) [Holländisch].

Ein Hund sieht seinen Herrn, der sich mit konstanter Geschwindigkeit in gerader Linie bewegt. Er bewegt sich in der Ebene immer genau auf seinen Herrn zu mit der v -fachen Geschwindigkeit (v konstant). Welche Bahn beschreibt er? Erreicht er seinen Herrn? Wo? Bewegt sich der Herr in der y -Achse eines Cartesischen Koordinatensystems, so gilt für die gesuchten Kurven

$$y' = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{c} \right)^{1/v} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{c} \right)^{-1/v}, \quad c \text{ konstant.}$$

Sie sind rational, wenn v rational ist. Eingehende Diskussion verschiedener Fälle. Auch die gegenseitige Bewegung von Hund und Herrn wird betrachtet und gedeutet als Übersetzproblem über einen Fluss, bei dem sich ein Ruderboot immer auf dieselbe Stelle des gegenüberliegenden Ufers zubewegt. Bol (Freiburg i. Br.)

Konvexe Gebilde:

Vincze, Stephan: Über den Minimalkreisring einer Ellinie. Acta Univ. Szeged., Acta Sci. math. 11, 133—138 (1947).

Es sei B ein konvexer Bereich in der Ebene, K seine Randkurve, und $o(P) = R(P) - r(P)$, wobei $R(P) = \max PX$, $r(P) = \min PX$ ($x \in K$) bezeichnet. Man bestätigt leicht, daß $R(P)$ überall und $-r(P)$ in B konvex ist [$f(P)$ heißt konvex, wenn $2f(P_0) \leq f(P_1) + f(P_2)$ gilt für den Mittelpunkt P_0 der Strecke $P_1 P_2$], und daraus folgt auch die Konvexität der „Oszillation“ $o(P)$. Mit Hilfe dieses Satzes leitet Verf. die bekannte Unizität des Minimalkreisringes ab [s. Bonnesen, Math. Ann. 91, 252—268 (1924)]. Ref. bemerkt, daß der Beweis (nach einer leichten Modifikation) auch im n -dimensionalen Raum gültig ist. Aus der Bonnesenschen Eigenschaft des Minimalkreisringes (Bonnesen, l. c. S. 257) erhält Verf. die Abschätzungen $R_u \leq R \leq 2 R_u$], $2r_i \geq 2r > r_i$ und $r \geq r_i R_u (R_u + \delta)$ (wobei R, r, R_u, r_i

bzw. die beiden Halbmesser des Minimalkreisringes, Um- und Inkreis halbmesser, δ den Abstand des Minimalkreisringmittelpunktes von einem Inkreis mittelpunkt bedeutet). Es folgen noch zwei Sätze über die Konvexität von gewissen Integralmittelwerten.
I. Fáry (Szeged).

Lázár, D.: Sur l'approximation des courbes convexes par des polygones. Acta Univ. Szeged., Acta Sci. math. **11**, 129—132 (1947).

Es wird bewiesen: Zu jeder geschlossenen konvexen Kurve gibt es für jedes $n (\geq 3)$ ein Paar ein- und umgeschriebene n -Ecke, für die das Verhältnis der Flächeninhalte $\geq \cos^2 \pi/n$ ausfällt. Der Satz ist scharf, wie das Beispiel des Kreises zeigt. Der nette Beweis ist, abgesehen von ausschaltbaren Stetigkeitsbetrachtungen, elementar und gründet sich auf eine frühere Arbeit von Fejes (dies. Zbl. **20**, 401). — Berichtigung eines störenden Druckfehlers: In der Mitte der S. 130 ist der Satz „Les triangles . . . du second.“ um drei Zeilen tiefer zu stellen. L. Rédei (Szeged).

Angewandte Geometrie:

Dietz, H.: Die Lösung des Sechstabanschlusses mit der Methode der dualen Abbildung. Ingenieur-Archiv **16**, 14—38 (1947).

Das Ziel des Verfahrens ist ein übersichtlicher Lösungsweg für allgemeine Gleichgewichtsaufgaben mit sechs unbekannten räumlichen Kräften. Dazu wird eine duale Abbildung benutzt, durch die alle Stäbe als Kräfte einer Abbildungsebene und alle Momente als parallele Vektoren senkrecht zu dieser Ebene erscheinen. Durch geeignete Wahl des Abbildungssystems kann die allgemeine Gleichgewichtsaufgabe in zwei Einzelprobleme getrennt werden, die der Reihe nach unabhängig voneinander zu lösen sind. An Stelle der sechs Gleichgewichtsbedingungen des Raumes entstehen so zwei Gruppen von je drei selbständigen Gleichgewichtsbedingungen, die beide graphisch als ebene Probleme behandelt werden können. In Sonderfällen entstehen noch weitere Erleichterungen. — Die praktische Brauchbarkeit des Verfahrens, wobei besonders die leichten Kontrollmöglichkeiten zu erwähnen sind, wird an einer Reihe von graphisch und numerisch ausgeführten Beispielen erwiesen. — Vgl. dazu Robert Sauer: Graphische Statik räumlicher Kräftesysteme mit Hilfe der dualen Kräfteabbildung, Z. angew. Math. Mech. **20**, 174—180 (1940); dies. Zbl. **24**, 69.
Ulrich Graf (Immenstaad/Bodensee).

Topologie:

Ridder, J.: Einige Anwendungen des Dualitätsprinzips in topologischen Strukturen. Proc. Akad. Wet. Amsterdam **50**, 731—740 (1947).

Es sei S eine Boolesche Algebra mit Einssoma 1 (Soma = Element von S ; das Komplement $1 - a$ eines Somas a wird mit a' bezeichnet). Jedem Soma $a \in S$ sei ein Soma $\bar{a} \in S$ als „abgeschlossene Hülle“ zugeordnet derart, daß folgende 4 Axiome erfüllt sind: I. $a \subset \bar{a}$; II. $a \subset b \rightarrow \bar{a} \subset \bar{b}$; III. $a = \bar{\bar{a}}$; IV. $\bar{0} = 0$. Nach A. Monteiro [Portugaliae Math. **4**, 158—160 (1943/45)] ist das Axiomensystem I—III äquivalent mit V: $y \cup \bar{y} \cup x \subset x \cup \bar{y}$ (\cup bedeutet die Vereinigung). Verf. stellt für jede der folgenden Somenfunktionen $a = (a')'$ (offener Kern), $a^e = \bar{a}'$, $a_e = a'$, $a^d = a \bar{a}'$ (Begrenzung), $a_o = a \cup a'$ ein zum System I—IV analoges Axiomensystem auf und zeigt, daß die ersten drei dieser Axiome jeweils äquivalent sind mit einem zu V analogen Axiom; für die Funktionen $a^r = a \bar{a}'$ (Rand) und $a_x = a \cup a'$ werden fünf Axiome aufgestellt, die zu I—V analog sind. Es werden die Äquivalenzbeziehungen zwischen den Axiomen für diese acht Funktionen untersucht. — Nach A. Monteiro und H. Ribeiro [Portugaliae Math. **3**, 171—184 (1942); dies. Zbl. **27**, 432] ist für jedes Soma x die abgeschlossene Hülle \bar{x} gleich dem Durchschnitt aller abgeschlossenen Somen $y = \bar{y} \subset x$; analog wird gezeigt: für jedes Soma x ist der offene Kern x gleich der Vereinigung aller offenen Somen $y = y \subset x$.
Nöbeling (Erlangen).

Hall, D. W. and J. T. W. Youngs: Comments on the cores of certain classes of spaces. *Ann. Math.*, Princeton, II. s. 48, 710—716 (1947).

Les Au. considèrent une classe d'espaces topologiques \mathfrak{X} , et une famille τ d'applications continues d'un espace de la classe \mathfrak{X} sur un espace de la même classe, τ contenant l'application identique de chaque $X \in \mathfrak{X}$ sur lui-même, et l'application composée de deux applications appartenant à τ . Etant donnée une sous-classe \mathfrak{M} de \mathfrak{X} , ils appellent noyau de \mathfrak{M} la classe $C(\mathfrak{M})$ des $A \in \mathfrak{M}$ tels que pour toute application $T \in \tau$, $T(A)$ appartienne aussi à \mathfrak{M} . Ils appliquent ces notions générales au cas où \mathfrak{X} est la classe des espaces péaniens (images continues d'un intervalle compact), τ la famille des applications monotones d'un espace péanien sur une autre. Citons un exemple de leurs résultats: si on prend pour \mathfrak{M} la classe des espaces péaniens cycliques, $C(\mathfrak{M})$ est la classe formée des courbes de Jordan et des espaces réduits à un point.

J. Dieudonné (Nancy).

Groot, J. de: A note on 0-dimensional spaces. *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* 50, 131—135 (1947).

In un insieme (non vuoto) N di punti consideriamo un sistema $\{S\}$ di sottoinsiemi di N , i quali godano delle seguenti proprietà: 1. $\{S\}$ contiene N e l'insieme vuoto; 2. Se S appartiene ad $\{S\}$, anche $N-S$ appartiene ad $\{S\}$; 3. $\{S\}$ contiene le somme e le intersezioni delle coppie di suoi elementi. Se si interpretano gli elementi di $\{S\}$ come intorni dei loro punti (ogni elemento di $\{S\}$ è al tempo stesso aperto e chiuso, ed) N si converte in uno spazio topologico 0-dimensionale $N\{S\}$. Se punti distinti di $N\{S\}$ ammettono intorni disgiunti e se $N\{S\}$ possiede basi numerabili, $N\{S\}$ è metricizzabile. — L'A. considera poi le quasi-componenti di uno spazio separabile M : queste possono essere interpretate come punti di uno spazio 0-dimensionale e regolare $Q(M)$. L'A. indica diverse relazioni intercedenti fra M e lo spazio $Q(M)$: per es., M è 0-dimensionale se e soltanto se coincide con $Q(M)$; se M è n -dimensionale, con n positivo, e totalmente sconnesso, lo spazio $Q(M)$ non ammette basi numerabili.

G. Scorza Dragoni (Padova).

Groot, J. de: Topological characterization of all subsets of the real number system *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* 50, 876—884 (1947).

L'A. ricerca sotto quali condizioni un sottoinsieme di uno spazio metrico e separabile M sia omeomorfo (topologicamente equivalente) ad un sottoinsieme dello spazio reale, euclideo ed unidimensionale S_1 . Secondo l'A., un sottoinsieme compatto K di M è omeomorfo ad un sottoinsieme compatto di S_1 , se le componenti di K sono punti o immagini topologiche di intervalli chiusi e se i punti interni di ogni componente A di K (la quale non si riduca ad un punto) non son d'accumulazione per $K-A$; inoltre: gli spazi metrici e separabili H i quali godono delle seguenti proprietà 1. sono semicompatti, 2. hanno come quasicomponenti o punti, o immagini topologiche di intervalli chiusi o aperti o semiaperti, 3. i punti interni di ogni componente B di H (la quale non si riduca ad un punto) non son d'accumulazione per $B-H$, questi spazi H sono, topologicamente parlando, identici ai sottoinsiemi di S_1 .

G. Scorza Dragoni (Padova).

Young, Gail S., Jr.: A characterization of 2-manifolds. *Duke math. J.* 14, 979—990 (1947).

Ein zusammenhängender metrischer Raum M , der im kleinen zusammenhängend und im kleinen kompakt ist und keine lokalen Zerlegungspunkte enthält, ist dann eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit, wenn es zu jedem Punkt von M eine Umgebung U gibt, die durch jede einfache geschlossene Kurve in U zerlegt wird. — Wird M durch jede einfache geschlossene Kurve so zerlegt, daß höchstens eine Komponente nicht kompakt ist, dann ist M , eventuell nach Entfernung eines oder zweier Punkte, homöomorph entweder zur Kugelfläche oder zur Ebene oder zur Halbebene.

Künneht (Erlangen).

Tutte, W. T.: The factorization of linear graphs. J. London math. Soc. **22**, 107—111 (1947).

In Verallgemeinerung des Satzes von Petersen enthält jeder zusammenhängende, reguläre Graph s -ten Grades mit gerader Punktezahl einen Faktor 1. Grades dann, wenn sein Zusammenhang nicht durch Streichung von weniger als $s-1$ Knotenpunkten zerstört werden kann. Dabei kann noch von einer beliebigen Kante verlangt werden, daß sie dem Faktor 1. Grades angehören soll. — Ein Graph enthält dann und nur dann keinen Faktor 1. Grades, wenn die Zahl der Komponenten mit ungerader Punktezahl, in die er durch Streichung beliebiger (eventuell keiner) Knotenpunkte zerfällt, größer ist als die Zahl der gestrichenen Punkte. *Künneht*.

Klassische theoretische Physik.

Mechanik:

Chazy, Jean: Sur une généralisation des équations canoniques. C. r. Acad. Sci., Paris **226**, 19—23 (1948).

Führt man in das System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_i}{dt} = Y_i, \quad \frac{dy_i}{dt} = -X_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

wo die Y_i, X_i Funktionen der x_i, y_i und von t sind, neue Variable x'_i, y'_i so ein, daß $\sum Y_i dx_i - \sum y'_i dx'_i = d\varphi + \psi dt$ wird $-\varphi$ und ψ Funktionen von x_i, y_i, t —, so

lauten die transformierten Gleichungen $\frac{dx'_i}{dt} = Y'_i; \frac{dy'_i}{dt} = -X'_i$, wobei X'_i, Y'_i durch $\sum (X_i \delta x_i - Y_i \delta y_i) - \delta\psi = \sum (X'_i \delta x'_i + Y'_i \delta y'_i)$ definiert sind (δ zeitlose Variation).

Hat man z. B. $\frac{dx_i}{dt} = \frac{y_i}{m_i}; \frac{dy_i}{dt} = -(-X_i)$ und führt nun Lagrangesche Parameter q_1, \dots, q_n und die zugehörigen Impulse p_i ein, so erhält man die für rheonome Systeme und beliebige Kräfte verallgemeinerten kanonischen Gleichungen. *Hamel*.

Mayer, A. G.: Sur un problème de Birkhoff. C. r. Acad. Sci. URSS., II. s. **55**, 472—475 (1947).

Es soll ein dynamisches System, dessen Zustände eine geschlossene dreidimensionale Mannigfaltigkeit bilden, konstruiert werden derart, daß die Ordnungszahl der zentralen Bewegungen größer als 3 ist [J. Birkhoff, Jber. Deutsche Math. Verein. **38**, 1—16 (1928)]. Verf. gibt folgendes allgemeine Konstruktionsverfahren: Im Zustandsraum eines dynamischen Systems D , der als n -dimensionale metrische Mannigfaltigkeit mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom vorausgesetzt wird, gebe es eine endliche Folge von Bahnen L_1, L_2, \dots, L_N mit folgenden Eigenschaften: 1. Für $k < N$ sei L_{k+1} enthalten in der Menge der vor- oder rückläufigen Häufungspunkte von L_k . 2. Keine Bahn L_k ist im Poissonschen Sinne stabil, ausgenommen L_N , wenn L_N geschlossen ist, ohne sich jedoch auf einen Gleichgewichtszustand zu reduzieren. Dann läßt sich im selben Zustandsraum ein dynamisches System D' konstruieren, für das die Ordnungszahl der zentralen Bewegungen $\geq N$ ist. Nimmt man als Ausgangssystem D das durch die periodischen Linien einer geeigneten Fläche negativer Krümmung definierte System, so erhält man in dem zugehörigen System D' eine Lösung der Birkhoffschen Aufgabe. Es lassen sich mit dieser Methode leicht vorhandene Beispiele angeben. *Rinow* (Berlin).

Mayer, A. G.: Sur les trajectoires dans l'espace à trois dimensions. C. r. Acad. Sci. URSS., II s. **55**, 579—581 (1947).

Es wird im dreidimensionalen euklidischen Raum zu jeder vorgegebenen transfinitiven Ordnungszahl β der ersten Klasse ein System von Bahnkurven konstruiert, das folgende Eigenschaften besitzt: Durch jeden Punkt des Raumes geht genau eine Kurve des Systems. Jede Kurve des Systems, sofern sie nicht in einen Punkt ausartet, besitzt stetig veränderliche Tangenten. Die Richtungskosinus

der Tangenten sind stetige Funktionen des Ortes. Es existiert eine Parameterdarstellung der Systemkurven, so daß der Satz von der stetigen Abhängigkeit der Kurven von den Anfangsbedingungen gilt. Die Ordnungszahl der zentralen Bahnen des Systems ist größer oder gleich β . Verf. liefert hiermit einen Beitrag zur Lösung einer von G. D. Birkhoff [Science, New York 94, 598 (1941)] gestellten Aufgabe.

Rinow (Berlin).

Almeida Meneses, Pablo Rogerio: Die Subresonanz für eine Gleichung zweiter Ordnung mit erzwungenen und periodischen Schwingungen, wenn die Reibung und die elastische Kraft nicht linear von der Bewegung abhängen. Rev. Ci., Lima 49, 71—80; 87—166; 201—238 (1947) [Spanisch].

Wenn auf ein reibungsfreies harmonisches Schwingungssystem mit der Grundfrequenz ω_0 , das unter dem Einfluß einer äußeren periodischen Kraft mit der Frequenz ω steht, noch eine vom Bewegungszustand (Ort und Geschwindigkeit) abhängige Zusatzkraft einwirkt, so ist das Ergebnis für die Eigenschwingungen eine Dämpfung und eine Verschiebung der Eigenfrequenz gegen die Grundfrequenz, für die erzwungenen Schwingungen eine Änderung der Amplitude. Ist die Zusatzkraft nicht linear, so werden im allgemeinen Eigen- und Resonanzfrequenz abhängig von der Amplitude, außerdem verzerrt sich die Schwingungsform. Insbesondere kann die erzwungene Bewegung, wenn die Frequenz der äußeren Kraft ein Vielfaches der Resonanzfrequenz ist, außer dem mit der äußeren Kraft synchronen Anteil auch eine Teilschwingung mit der Resonanzfrequenz selber enthalten. Diese Erscheinung heißt Subresonanz. (Technisches Beispiel: Flattern von Tragflächen wegen Subresonanz mit dem Propeller.) Verf. nimmt von vornherein an, daß die Resonanzfrequenz gleich der Grundfrequenz des ungestörten Systems bleibt und die äußere Kraft sinusförmig verläuft. (Auch der Sinusform kommt hier aber nicht ganz dieselbe Allgemeingültigkeit zu wie sonst, weil sich in einem nichtlinearen System die erzwungenen Schwingungen mehrerer Kräfte nicht einfach überlagern.) Die Bewegungsgleichung heißt unter diesen Voraussetzungen

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu f(x, \dot{x}) = A \sin \omega t,$$

wo μ ein hinreichend kleiner Parameter sein soll. Der Ausschlag x und danach auch die Störungskraft $f(x, \dot{x})$ werden in Potenzreihen nach μ entwickelt:

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots, \quad f = f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \dots$$

x_0 ist die ungestörte Schwingung ($\mu = 0$), $f_0 = f(x_0, \dot{x}_0)$. Subresonanz besteht, wenn alle Glieder x_0, x_1, x_2, \dots periodisch mit ω_0 sind. Als Bedingung ergibt sich, daß die Funktionen f_0, f_1, f_2, \dots keine Teilschwingung mit der einfachen Grundfrequenz ω_0 enthalten dürfen. Damit ist klar, daß im linearen Fall $f(x, \dot{x}) = a x + b \dot{x}$ Subresonanz nicht möglich ist. Es werden nun insbesondere für die folgenden Formen der Störungskraft $f(x, \dot{x})$ die näheren Bedingungen der Subresonanz aufgestellt:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + a x^2 + b x^3, \quad \omega = 2\omega_0; \quad \dot{x}(a + b x^2) + c_2 x^2 + c_3 x^3, \quad \omega = 2\omega_0; \\ \dot{x}(a + b x^2), \quad \omega = 3\omega_0; \quad \dot{x}(a + b x^2), \quad \omega = n\omega_0, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

(Die Bezeichnungen sind hier ein wenig geändert, da die Arbeit unübersichtlich ist, auch manche Satzfehler aufweist.)

Bödeuradt (Göttingen).

Egerváry, E.: On a generalization of the Langrangean solution of the problem of three bodies. C. r. Acad. Sci. URSS, II, s. 55, 793—795 (1947).

Verf. behandelt spezielle Lösungen eines ebenen Dreikörperproblems, bei dem das Kräftepotential eine Funktion $W(J, A)$ des Trägheitsmomentes um den Schwerpunkt $J = S^2 + D^2$ und der Dreiecksfläche $A = \frac{1}{2} \sqrt{3(S^2 - D^2)}$ der drei als gleich vorausgesetzten Massen ist. Verf. bestimmt alle Lösungen mit $DS = q = \text{const}$ durch Quadraturen. Insbesondere betrachtet er: I. $0 < q < 1$, II. $q = 0$ (die Lagrangeschen äquidistanten Lösungen), III. $q = 1$ (darunter die Lagrangesche kollineare Lösung sowie eine neue spezielle von Sokolov [C. r. Acad. Sci. URSS 46, Nr. 3 (1935)] aufgestellte Lösung für das Kräftepotential (*) $W = \frac{1}{2}(9J^2 - 16A^2)$

$= \sum r_k^4$. IV. $S = S_0 = \text{const}$, $D = D_0 = \text{const}$, eine Bewegung, bei der die freien Massenpunkte fest mit drei Kreisscheiben verbunden sind, deren Mittelpunkte ein festes gleichseitiges Dreieck bilden und die auf einem vierten festen Kreis mit gleichförmiger Geschwindigkeit rollen; für (*) ist das Dreieck dabei nicht zu sich selbst ähnlich.

Zum Schluß zeigt der Verf., daß $\sum r_k^4$ außer dem elastischen das einzige Potential von Zentralkräften ist, das sich wie die Potenzen der gegenseitigen Abstände der drei Massen verhält und von der Form $W(J, A)$ ist. Erwünscht erscheint eine Befreiung von der durchweg gemachten Annahme der Gleichheit der drei Massen.

E. Hölder (Leipzig).

Buchanan, Daniel: Oscillating satellites with the force varying inversely as the n^{th} power of the distance. Trans. R. Soc. Canada, Sect. III, III. s. 41, 27—43 (1947).

Die bisher nur für den Fall des Newtonschen Gravitationsgesetzes ($n = 2$) angestellten Untersuchungen über die periodischen Bahnen in der Nähe der fünf Lagrangeschen Librationspunkte des eingeschränkten Dreikörperproblems werden hier für ein beliebiges reelles, positives und rationales n als Exponent des Kraftgesetzes durchgeführt. Es werden die Bedingungen ermittelt, unter denen in den einzelnen Fällen zwei- oder dreidimensionale periodische Lösungen existieren.

E. Rabe (Heidelberg).

Emersleben, O.: Die mittlere Entfernung Sonne-Planet. Astron. Nachr. 275, 263—265 (1947).

Es wird auf den Unterschied zwischen der großen Halbachse einer Bahnellipse und dem zeitlichen Mittelwert des Abstandes Sonne—Planet hingewiesen und die Größe dieses Unterschiedes hergeleitet.

E. Rabe (Heidelberg).

Stumpff, K.: Über die Reihenentwicklung der rechtwinkligen Bahnkoordinaten im Zweikörperproblem. II. Astron. Nachr. 275, 203—222 (1947).

In Ergänzung einer vorangegangenen Arbeit unter dem gleichen Titel [Astron. Nachr. 274, 49—68 (1944)] werden dort offengebliebene Punkte untersucht. Ein früher nur induktiv gefundener Teil des Koeffizientengesetzes wird durch strenge Deduktion hergeleitet. Für kleine Argumente werden die vorher der unbestimmten Form $0:0$ zustrebenden Koeffizienten auf gewisse einfach gebaute Grundfunktionen zurückgeführt, deren Theorie näher entwickelt wird, da sie in der Zweikörperbewegung eine besondere Rolle spielen. Schließlich wird der Anwendungsbereich der Reihen abgegrenzt und festgestellt, daß die behandelte spezielle Art der Entwicklung nur bei sehr kreisähnlichen Ellipsen Vorzüge gegenüber anderen Methoden besitzt. *E. Rabe (Heidelberg).*

Jardetzky, W.: Einige Bemerkungen zur Einführung neuer Elemente in der Bahnbestimmung. Astron. Nachr. 275, 223—228 (1947).

Die Transformationsinvarianten, aber mit dem Planetenort variablen „lokalen Bahnelemente“ von K. Stumpff werden mit den vektoriellen Bahnelementen von M. Milankovitch in Verbindung gebracht. Mit Hilfe einer Formel von van Orstrand wird ferner die von Stumpff aufgestellte Hauptgleichung der Ephemeridenrechnung durch Reihenumkehrung aufgelöst.

E. Rabe (Heidelberg).

Elastizität:

Prager, W. and J. L. Synge: Approximations in elasticity based on the concept of function space. Quart. appl. Math. 5, 241—269 (1947).

Für feste elastische (i. a. anisotrope) Körper mit positiv definiter Deformationsenergie, die sich in den Spannungskomponenten quadratisch ausdrückt, wird durch Deutung des Spannungszustandes als Punkt bzw. Vektor eines Funktionenraumes eine Theorie entwickelt, welche sich die Bestimmung von Näherungslösungen elastischer Randwertprobleme mit abschätzbaren Fehlern zum Ziel setzt. Die Ausführungen werden auf das praktische Beispiel der Torsion eines Prismas von quadratischem Querschnitt angewandt.

V. Garten (Tübingen).

Narodeckij, M. S.: Zum Hertzschen Problem der Berührung zweier Zylinder. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 56, 463—466 (1947) [Russisch].

Es wird im Anschluß an die Untersuchungen von Hertz und Beljaev mit funktionentheoretischen Methoden das ebene Problem der Spannungsverteilung im Fall der Berührung zweier elastischer Zylinder (eines endlichen und eines unendlichen) behandelt, und zwar in der Weise, daß dem Einfluß des Kraftangriffspunktes Rechnung getragen werden kann. *V. Garten (Tübingen).*

Davies, R. M.: A critical study of the Hopkinson pressure bar. Philos. Trans. R. Soc. London, A 240, 375—457 (1948).

Die radialen und longitudinalen Verschiebungen in einem Stab, auf dessen eines Ende kurzzeitig ein hoher Druck ausgeübt wird, werden durch die Änderung der Kondensatorkapazität am anderen Ende mit Hilfe eines Oszillographen gemessen. Die Ergebnisse stimmen gut mit der exakten Theorie von Pochhammer und Chree überein, die im Gegensatz zur elementaren Theorie von Love, daß sich die Druckstöße ohne Formänderung mit konstanter Geschwindigkeit fortpflanzen, die Dispersion der Spannungswellen zu berechnen gestattet. *Pretsch (Göttingen).*

Stiles, W. B.: Bending of clamped plates. J. appl. Mech., New York 14, A 55—A 62 (1947).

Entweder alle Seiten einer Rechteckplatte sind eingespannt oder 2 anliegende sind eingespannt und die anderen liegen auf. Die Platte trägt entweder konstante Flächenlast oder eine Last im Mittelpunkt. Wenn alle Seiten aufliegen, wird die Durchbiegung mit w_0 bezeichnet. Die am Rande den Wert 0 annehmenden Amplituden der Membranschwingungen werden mit v_j bezeichnet. Die harmonische Funktion, die am aufliegenden Rande den Wert 0 und am eingespannten Rande den Wert $\frac{\partial w_j}{\partial n}$ annimmt, wird mit p_j bezeichnet. Das Integral der Differentialgleichung $\Delta v_j = p_j$ soll am Rande den Wert 0 annehmen. Aus den Gleichungen

$$\sum_{j=1}^i a_j \iint p_j p_k dx dy = - \iint \frac{q}{B} v_k dx dy, \quad k = 1, 2, 3, \dots, i,$$

werden die a_j berechnet. $w_0 = \sum_{j=1}^i a_j v_j$ ist die Durchbiegung, bei der die Randbedingung $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$ durch die Randbedingungen $\int_{\partial \Omega} p_j ds = 0$ ersetzt ist. *Ludwig.*

Young, Dana: Bending of clamped plates. J. appl. Mech., New York 14, A 254—A 255 (1947).

Ergänzende Zusammenstellung des Schrifttums über eingespannte Rechteckplatten und Erörterung einiger Verfahren. *Kennad Ludwig (Hannover).*

Hydrodynamik:

Polya, G.: A minimum problem about the motion of a solid through a fluid. Proc. nat. Acad. Sci. USA 33, 218—221 (1947).

Verf. betrachtet (als Vorbereitung entsprechender Untersuchungen des räumlichen Problems) die 2-dimensionale Bewegung einer unzusammendrückbaren, reibungslosen Flüssigkeit von gleichförmiger Dichte, welche den Außenraum eines unendlich langen Zylinders ausfüllt. Die Bewegung erfolgt parallel zur Ebene der komplexen Veränderlichen z . Diese Ebene steht senkrecht auf der Zylinderachse und schneidet den Zylinder in einer geschlossenen Kurve C , deren Äußeres mit C^* bezeichnet sei. Bedeutet w die Geschwindigkeit im Punkt z , wenn es sich um die Bewegung des Zylinders mit der Translationsgeschwindigkeit U durch die im Unendlichen in Ruhe befindliche Flüssigkeit handelt, so hängt die (auf die Einheit der Höhe bezogene) virtuelle Masse $M = \rho U^2 \iint_{C^*} w^2 dx dy$ von Größe und Gestalt des Zylinderquerschnittes ab. Verf. beweist, daß unter allen Zylindern, deren

Querschnitt gleichen Flächeninhalt besitzt, dem Kreiszylinder das Minimum der (auf die Höheneinheit bezogenen) mittleren virtuellen Masse $\bar{M} = 1/(2\pi a) \int_0^{2\pi} M_\alpha d\alpha$ zukommt. M_α bedeutet hier die einer Geschwindigkeitsrichtung zugeordnete virtuelle Masse. Die mittlere virtuelle Masse nimmt durch Symmetrisierung ab.

V. Garten (Tübingen).

Zenkin, A.: Über die Strömung um eine Kugel in Gegenwart eines Wirbelringes. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 58, 373—375 (1947) [Russisch].

Verf. stellt sich die Aufgabe, die Stromfunktion zu berechnen, die zur Strömung einer idealen Flüssigkeit um eine Kugel vom Radius a gehört, wenn sich außerdem in der Flüssigkeit ein kreisförmiger Wirbelring vom Radius R_1 und der Zirkulation Γ_1 befindet, dessen Ebene auf der Richtung der Anströmungsgeschwindigkeit V_0 senkrecht steht und dessen Mittelpunkt auf der Symmetrieachse der Strömung liegt. Zu diesem Zweck spiegelt er den Wirbelring an der Kugeloberfläche gemäß der Transformation nach reziproken Radien und erhält im Innern der Kugel einen zweiten Wirbelring vom Radius R_2 , für dessen Zirkulation der Wert $\Gamma_2 = \sqrt{R_1/R_2} \Gamma_1$ gewählt werden muß, um die Randbedingung an der Kugeloberfläche zu erfüllen.

Hans Schubert (Rostock).

Chou, P. Y.: The turbulent flow along a semi-infinite plate. Quart. appl. Math. 5, 346—353 (1947).

Für die turbulente Strömung längs einer Platte bei konstantem Druck wird für das mit der Schubspannungsgeschwindigkeit U_τ dimensionslos gemachte Geschwindigkeitsprofil U/U_τ , abhängig vom dimensionslosen Wandabstand η , theoretisch eine einfache Formel abgeleitet, die von der laminaren Unterschicht bis in das vollturbulente Gebiet gilt und sich Messungen von H. Dryden, aber auch den nicht zitierten, genaueren von H. Reichardt [Z. angew. Math. Mech. 20, 297—328 (1940)] gut anpaßt: $\eta = 0,959 U/U_\tau + 0,1024 (e^{0,4 U/U_\tau} - 1)$. (Bem. d. Ref.: Die Herleitung scheint jedoch leider nicht in allen Punkten zwingend.) Wiegandt.

Hicks, B. L., P. E. Guenther and R. H. Wasserman: New formulations of the equations for compressible flow. Quart. appl. Math. 5, 357—361 (1947).

Mit Hilfe des Machschen Vektors $\mathfrak{M} = M \mathfrak{B}/V$ (M örtliche Machzahl, \mathfrak{B} Strömungsgeschwindigkeit, V absoluter Betrag von \mathfrak{B}) und des Croccoschen Vektors $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}/V_t$ (V_t Betrag der örtlichen Höchstgeschwindigkeit), schreibt Verf. die Bewegungsgleichungen und die Kontinuitätsgleichung einer reibungslosen, kompressiblen Flüssigkeit in der Form

$$\mathfrak{M} \cdot \nabla \mathfrak{M} - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \mathfrak{M} \cdot \nabla \log p = 0, \quad \nabla \cdot \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2\right)^{-\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}} \mathfrak{M} = 0$$

bzw.

$$\mathfrak{B} \cdot \nabla \mathfrak{B} + \frac{\kappa-1}{2\kappa} (1 - W^2) \nabla \log p = 0, \quad \nabla \cdot (1 - W^2)^{\frac{1}{\kappa-1}} \mathfrak{B} = 0,$$

worin wie üblich p den Flüssigkeitsdruck und $\kappa = c_p/c_v$ das Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volumen bedeutet. In Verallgemeinerung gewisser Gleichungen von Crocco [Z. angew. Meth. Mech. 17, 1—7 (1937); dies. Zbl. 27, 276], Tollmien [Luftfahrtforschung 19, 145—147 (1942); dies. Zbl. 27, 276] und Emmons (NACA. TN Nr. 932, 1944) erhalten Verf. ähnlich wie Vázconji [Quart. appl. Math. 3, 29—37 (1945)] die Beziehung

$$\mathfrak{B} \times (\nabla \times V) = c_p \nabla T_t - T \nabla S$$

und dazu entsprechend $\mathfrak{B} \times (\nabla \times \mathfrak{B}) = \frac{\kappa-1}{2\kappa} (1 - W^2) \nabla \log p_t$

(p_t Staudruck, T_t Stautemperatur, S Entropie). Ferner wird gezeigt, daß in jeder stationären adiabatischen Strömung, auch wenn sie nicht wirbelfrei ist, der Strom-

röhrenquerschnitt dort ein Minimum besitzt, wo die Strömungsgeschwindigkeit die örtliche Schallgeschwindigkeit erreicht, und kurz auf die Besonderheiten wirbelfreier M -, B - und B -Felder eingegangen.

Hans Schubert (Rostock).

Optik:

Smith, T.: On perfect optical instruments. Proc. physic. Soc. London 60, 293 bis 304 (1948).

Die charakteristische Winkelfunktion T wird benutzt, um optische Systeme endlicher Brennweite zu untersuchen, mit denen eine ausgedehnte Fläche auf eine andere ohne Aberration abgebildet wird. Es wird gezeigt, daß die früher gefundenen Formeln von T , die vollkommener Abbildung entsprechen, erschöpfend sind. Bei vollkommener Abbildung ist die Bildfläche der Objektfläche ähnlich. Der Verf. geht kurz auf die optischen Weglängen zwischen konjugierten Punkten dieser Flächen ein. Im allgemeinen kann nur eine Objektfläche ohne Aberration abgebildet werden. In einem Sonderfall können zwei Paare konjugierter Flächen, die Teile zentrierter Flächen zweiter Ordnung sind, vollkommen abgebildet werden. Die beiden Flächen des gleichen Raumes haben zusammenfallende Hauptachsen, und in jeder dieser Richtungen ist das Produkt der beiden Vergrößerungen gleich dem Quadrat des Verhältnisses der Brechungsindizes der äußeren Medien. Im allgemeinen wird der Mittelpunkt des Objektes nicht vollkommen abgebildet. Die Weglänge von irgendeinem Punkt jeder der beiden Objektflächen zu seinem Bild ist unveränderlich. Als elementares Beispiel dieser Abbildungsgruppe weist der Verf. auf die Brechung an einzelnen sphärischen Flächen hin. — Als weiteren Ausnahmefall betrachtet der Verf. den, in dem die konjugierten Flächen eben sind. Es wird gezeigt, daß ein System wie etwa eine photographische Linse zusätzlich zu der Eigenschaft, von allen Aberrationen für eine Einzelvergrößerung frei zu sein, auch Bilder erzeugen kann, die für alle Vergrößerungen frei sind von Krümmung, Astigmatismus und Verzeichnung. Der Verf. weist darauf hin, daß die für diese beiden Gruppen gefundene Eigenschaft einigen allgemeinen Folgerungen von Clerk Maxwell widersprechen. Obwohl die Existenz vollkommener Instrumente mit optischen Gesetzen nicht unvereinbar ist, erfüllen praktisch ausgeführte Systeme reflektierender oder brechender Flächen diese Forderungen nie vollkommen.

Picht (Potsdam-Babelsberg).

Joeh, Jorgen: A special case of velocity focusing in a magnetic deflecting field. Danske Vid. Selk., mat.-fysiske Medd. 24, Nr. 7, 22 S. (1948).

Verf. gibt eine eingehende Darstellung der allgemeinen Grundlage der Fokussierungsmethode, die er zur Geschwindigkeitsfokussierung eines Elektronenstrahlenbündels benutzt hat, das in einem keilförmigen magnetischen Feld abgelenkt wurde. Er weist darauf hin, daß die Behandlung des Problems mittels geometrischer Optik zeigt, daß eine Fokussierung für alle Arten geladener Teilchen erreicht werden kann, die ein solches willkürlich ausgedehntes, homogenes, keilförmiges, magnetisches Feld durchlaufen haben. Auch wird darauf hingewiesen, daß die Berechnungen bei der Konstruktion anderer Arten von Apparaturen mit Vorteil angewandt werden können. Verf. gibt zunächst eine allgemeine Beschreibung der Fokussierungsmethode, die darin besteht, daß das von einem Quellpunkt ausgehende Strahlenbündel vor seinem Eintritt in das keilförmige magnetische Feld durch einen Plattenkondensator geschickt wird, dessen eine auf der Seite der Keilkante des Magnetfeldes liegende ebene Platte geerdet ist, während die ihr gegenüber stehende parallele Platte an eine Spannung E gelegt ist, die den Schwankungen ΔV des die Elektronen beschleunigenden Potentials (von dessen Mittelwert) proportional ist, wobei natürlich $\Delta V \ll V$ vorausgesetzt ist. Anschließend wird eine Berechnung der Lage des Brennpunktes (Bildpunktes) der Anordnung gegeben, nachdem zuvor qualitativ gezeigt war, daß bei nicht konstantem Beschleunigungspotential V die mit ΔV proportionalen Spannungsschwankungen des Kondensators auf das Elektronenstrahlenbündel im

richtigen, d. h. gewünschten Sinne erfolgen. Für die richtige Wirkung ist die Bestimmung des Proportionalitätsfaktors E_0 des Plattenkondensators erforderlich. Bei den Berechnungen tritt dieser Proportionalitätsfaktor in der Verbindung $\varphi = (l/d) \cdot E_0$ auf, wo l/d das Verhältnis zwischen der Länge der Kondensatorplatten und ihrem gegenseitigen Abstand ist. Verf. geht auf die Bestimmung des Proportionalitätsfaktors E_0 näher ein und gibt zur Erleichterung der praktischen Anwendung für verschiedene Keilwinkel des ablenkenden magnetischen Feldes graphische Darstellungen der Größe φ als Funktion des Brennpunktstandes. Mittels der geometrischen Optik werden weiter eine Reihe charakteristischer Eigenschaften der Ionenwege diskutiert. Zum Schluß folgen einige technische Bemerkungen über die Benutzung der Methode.

Picht (Potsdam-Babelsberg).

Atomphysik.

Quantenmechanik:

Wild, E.: On first order wave equations for elementary particles without subsidiary conditions. Proc. R. Soc. London A **191**, 253—268 (1947).

Es ergibt sich aus der Spinordarstellung von Wellengleichungen vom Typ der Diracschen, daß man außer für die Diracsche Gleichung selbst und eine für Mesonen vom Spin 0 und 1 Nebenbedingungen braucht von der Art der Divergenzrelationen der Maxwellschen Theorie, die bei der Quantelung Schwierigkeiten machen. Verf. untersucht, ob dies auch zutrifft, wenn man von irgendwelchen linearen hyperkomplexen Differentialgleichungen vom Diracschen Typ ausgeht. Es wird gezeigt, daß die Gleichung $\beta_k \partial \psi / \partial x_k = i \kappa \psi$ neben den genannten Fällen keine weiteren liefert, die folgenden Bedingungen genügen: 1. Es soll keine zeitfreien Nebenbedingungen geben. 2. Die Gesamtenergie ist positiv oder Quantisierung gemäß Fermi-statistik ist möglich.

F. Bopp (Hechingen/Hohenzollern).

Durand, E.: Nouvelle représentation et forme plus générale des équations de l'électromagnétisme classique. C. r. Acad. Sci., Paris **225**, 567—569 (1947).

Wenn man die Vektoren \mathfrak{E} und \mathfrak{B} des elektromagnetischen Feldes zu einer komplexen Größe $\vec{\psi} = \mathfrak{B} + i \mathfrak{E}$ zusammenfaßt, erhält man Gleichungen von der Form der Diracgleichung, welche jedoch mit zum Spin 1 gehörigen Matrizen gebildet sind. Es ergeben sich für die drei Komponenten $\vec{\psi}$ folgende vier Gleichungen: $\text{rot } \vec{\psi} + \frac{i}{c} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$, $\text{div } \vec{\psi} = 4\pi i \rho$. Passende Hinzufügung einer vierten Komponente ψ_4 , die für die Maxwell'schen Gleichungen verschwindet, ergibt eine verallgemeinerte Gleichung, die mit der Diracgleichung äquivalent ist. [Vgl. dazu auch C. Schaefer, Einführung in die theort. Phys. III, 2. S. 456 (1937)]. Physikalische Konsequenzen der verallgemeinerten Gleichungen und auch der veränderten Auffassung der Maxwell'schen werden nicht diskutiert. Insbesondere erscheint dem Ref. eine Untersuchung der Spineigenschaften wünschenswert.

Bopp.

Veselov, M. G. und M. N. Adamov: Quantenmechanische Berechnung der Polarisierbarkeit des Wasserstoffmoleküls. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. **57**, 235—238 (1947) [Russisch].

Zur Berechnung der Polarisierbarkeit des H_2 -Moleküls bestimmen Verff. die Energiestörung 2. Ordnung durch ein homog. elektr. Feld. Als ungestörte Eigenfunktion ψ_0 wird die von Weinbaum [J. chem. Phys. **1**, 593 (1933)] benutzt und für die gestörte $\psi_0(1+f)$ angesetzt (Slater-Kirkwood). f enthält zwei Parameter und entspricht einer Anwendung von Starkeffekteigenfunktionen ohne Austausch. Die Parameter lassen sich aus einer Minimumsforderung numerisch bestimmen. Dann ergeben sich als Polarisierbarkeiten (in atomaren Einheiten $a_0^3 = 1,48 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^3$): $\alpha_{||} = 6,3 a_0^3$, wenn das Feld in Richtung der Kernverbindungsline liegt, und $\alpha_{\perp} = 4,8 a_0^3$ für ein Feld senkrecht zur Kernverbindungsline.

Die Ergebnisse stehen zahlenmäßig in Einklang mit experimentellen Daten und werden mit theoretischen Berechnungen anderer Autoren verglichen. — Anm. d. Ref.: Eine Arbeit des Ref. wird leider beim Vergleich nicht berücksichtigt [R. Gans u. B. Mrowka, Schr. Königsberger Gelehrten Ges., Naturw. Kl. 12, 1 (1935)].

B. Mrowka (Frankfurt a. M.).

Fermi, E. and E. Teller: The capture of negative mesotrons in matter. *Physic. Rev.*, Minneapolis, II. s. 72, 399—408 (1947).

Die Zeit für die Abbremsung von Mesonen berechnet sich aus zwei Anteilen. So lange die Mesonengeschwindigkeit größer als die der Atomelektronen ist, d. h. für $E > 2000$ eV, kann man nach den üblichen Methoden rechnen. Unterhalb rechnen Verff. Abbremsung in einem Fermischen Elektronengas. Strahlungsverluste sind nur unmittelbar in Kernnähe beträchtlich. Die Zeit bis zum Einfang auf innerster Bahn ist danach in dichter Materie 10^{-13} sec, in Gasen 10^{-9} sec. Diese Zeit ist klein gegen die Lebensdauer der Mesonen, so daß eine Konkurrenz nur zwischen dem radioaktiven Zerfall und möglichen Kernprozessen besteht. Bopp.

Finkelstein, R. J.: The γ -instability of mesons. *Physic. Rev.*, Minneapolis, II. s. 72, 415—422 (1947).

Es werden folgende γ -Übergänge zwischen Mesonenzuständen diskutiert: $M \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2$, $M \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$, $M_1 \rightarrow M_0 + \gamma$, $M_1^\pm \rightarrow M_0^\pm + \gamma$. Die zugehörigen Halbwertszeiten sind $1 \cdot 10^{-16}$, $2 \cdot 10^{-11}$, $1 \cdot 10^{-18}$ bzw. $4 \cdot 10^{-18}$ sec. Außer im zweiten Fall sind alle Integrale logarithmisch divergent. Wenn auch die Bedeutung der Ergebnisse wegen der Unsicherheit in der Theorie des Mesons und wegen der quantentheoretischen Divergenzen schwer abzuschätzen ist, darf man wohl mit dem Verf. aus den Ergebnissen schließen, daß stets, wenn γ - und β -Prozesse konkurrieren können, erstere gewinnen.

Bopp (Hechingen/Hohenzollern).

Morette, Cécile and H. W. Peng: On the production of mesons by nucleon-nucleon collisions. *Proc. Irish Acad. A* 51, 217—237 (1948).

Direkte Berechnung des Wirkungsquerschnittes unter der Voraussetzung unrelativistischer Bewegung der Nukleonen und Möller-Rosenfeldscher Wellengleichung der Mesonen. Ergänzung der nur für sehr schnelle Nukleonen gültigen Rechnungen von Heitler und Peng, *Proc. Irish Acad. A* 49, 101 (1943) und Heitler, *Proc. Irish Acad. A* 50, 155 (1945). Für Mesonen der 185fachen Elektronenmasse ist der W. Q. bei einer Primärenergie von rund $3 \cdot 10^8$ eV etwa $8 \cdot 10^{-28}$ cm², bei rund $5 \cdot 10^8$ eV etwa $1,6 \cdot 10^{-26}$ cm², während die früheren Arbeiten für große Energie etwa 10^{-25} cm² ergeben hatten. Für Mesonen von 350 Elektronenmassen sind die W. Q. rund 6mal größer, die Genauigkeit der Rechnung oben geringer. v. Weizsäcker.

Jost, Res: Compton scattering and the emission of low frequency photons. *Physic. Rev.*, Minneapolis, II. s. 72, 815—820 (1947).

In der Theorie der Bremsstrahlung ergeben sich Schwierigkeiten für den Wirkungsquerschnitt bei der Emission vieler kleiner Quanten, die nach der Methode von Bloch-Nordsieck behandelt werden können. Auch die Theorie des Comptoneffektes führt zu Divergenzen, wenn man neben dem gestreuten Lichtquant noch die Emission weiterer Lichtquanten kleiner Energie berücksichtigt. Verf. zeigt, daß die von Bloch-Nordsieck angegebene Transformation auch im Falle des Comptoneffektes mit Emission anwendbar ist und zu konvergentem Ergebnis führt. In erster Näherung ergibt sich die Klein-Nishinaformel. Bopp.

Jayarathnam Eliezer, C.: Quantum electrodynamics and low-energy photons. *Proc. R. Soc. London A* 191, 133—136 (1947).

Verf. rechnet mit der Diracschen λ -Limitierung einen mit der Emission eines energiearmen Photons verbundenen Wirkungsquerschnitt aus. Es zeigt sich, daß die Infrarotschwierigkeiten durch die Diracsche Methode nicht behoben werden. Man muß also auch in diesem Fall wie Bloch-Nordsieck rechnen.

Bopp (Hechingen/Hohenzollern).